

 ПОСОБИЯ
для
ТРУДОВОЙ ШКОЛЫ 

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

НОВЫЙ ЗАДАЧНИК
ПО
ГЕОМЕТРИИ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ТРУДОВОЙ ШКОЛЫ

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

**НОВЫЙ ЗАДАЧНИК
ПО
ГЕОМЕТРИИ**

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

**ДОПУЩЕНО НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ СЕКЦИЕЙ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УЧЕНОГО СОВЕТА**



**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1925 ЛЕНИНГРАД**

ТИ ПО Г РА Ф И Я
ГОСУДАРСТВЕННОГО ИЗДАТЕЛЬСТВА
„КОМИНТЕРН“
ЛЕНИНГРАД
Екатерингофский просп., 87.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Геометрические задачи редко возникают на практике в той отвлеченной форме, в какой они обычно предлагаются задачами. В реальной жизни, в технике, в науке геометрическая сторона задачи большею частью заслоняется, затушевывается посторонними элементами, из которых ее необходимо выделить, прежде чем приступить к решению. Нередко уже одно такое обнажение геометрической основы реального задания почти равносильно его разрешению, потому что приводит запутанный вопрос к ясной математической схеме. Но умение отыскивать в конкретной задаче ее геометрическую основу, переводить реальный вопрос на язык геометрии, требует особого навыка; и, конечно, он не может быть приобретен упражнением исключительно на готовых схемах, обычно предлагаемых задачами. Отсюда та геометрическая беспомощность, которая наблюдается у большинства изучавших геометрию, когда они сталкиваются с геометрическими задачами в жизненной практике: они не знают, *как* применить в конкретном случае свои вполне достаточные геометрические познания, а зачастую даже и не подозревают, что подлежащий разрешению вопрос есть задача геометрическая. Между тем, едва ли можно оспаривать, что умение прилагать свои математические познания на практике, за пределами тетради и классной доски, есть один из существенных элементов математического развития и должно воспитываться школой. Каков бы ни был выбор теоретического материала для школьного курса геометрии, как бы ни распределялся он по концентрикам, каким бы методом ни доводился до сознания учащихся, — необходимо чтобы они умели прилагать приобретенные теоретические познания

•

к разрешению реальных задач. Это может быть достигнуто лишь систематическим упражнением в решении задач с реальным содержанием, приближающихся по своей форме к тем, какие возникают в действительной жизни. Отсюда — необходимость пополнить существующие сборники геометрических задач подбором упражнений особого рода, преследующих указанную цель.

Такого рода реальные задачи и преобладают в настоящем сборнике. В этом задачнике, преимущественно во вторых двух третях его, составитель стремился собрать возможно больше примеров разнообразного применения геометрии в технике, естествознании, мироведении и обиходной жизни, преследуя попутно цель наглядно убедить в широкой и плодотворной приложимости даже весьма скромных геометрических познаний. О том, откуда почерпался материал для задач, можно судить по имеющемуся в книге предметному указателю. Многие задачи по внешнему выражению совсем не походят на привычный тип геометрических упражнений. Такие, например, задачи, как 324-я: «Почему передняя ось телеги больше стирается, нежели задняя?» или 828-я: Два полных самовара, больший и меньший, одинаковой формы, нагреты одинаково. Какой остынет скорее?», — могут с первого взгляда показаться попавшими в геометрический задачник по недоразумению. Однако, это по существу задачи геометрические, только не переведенные на условный язык математических схем, а взятые непосредственно в той форме, в какой они возникают в реальной жизни.

Элементарные технические задачи сборника никаких специальных познаний от учащегося не требуют. Числовой материал их сообразован с соответствующими «Урочными положениями». От намеренного подбора чисел, облегчающего выкладки, составитель во многих случаях воздерживался, так как искусственный подбор противоречит основной цели сборника — подготовить к решению задач в реальных условиях.

В связи с такой тенденцией сборника, некоторые отделы в нем разработаны подробнее общепринятого масштаба. Это прежде всего относятся к главе X — «Длина окружности»: здесь, помимо задач обычного типа, имеются особые параграфы и соответствующие упражнения, относящиеся к расчету ременной и зубчатой передачи и к работе токарного станка, как примеры технического применения геометрических знаний, — а также задачи на вычисление угла зрения или угловой величины предметов, в виду исключительно важного общеобразовательного значения этих понятий. Больше обычного уделено внимания отношению поверхностей и объемов подобных тел, — роду задач, весьма часто возникающих на практике и разрешаемых в обиходной жизни неправильно. — Составитель, однако, вовсе не предлагает пользующимся книгой проделывать подряд все ее упражнения. Едва ли найдется такой состав учащихся, которому были бы знакомы все отделы техники и общего знания, затрагиваемые в задачах сборника. Разнообразный подбор предлагается именно для того, чтобы преподаватель мог черпать из него упражнения, относящиеся к знакомым учащимся предметам, пропуская остальные ¹⁾).

Имея в виду, что прохождение геометрии нередко опережает изучение алгебры, составитель стремился сделать настоящий задачник пригодным, между прочим, и для таких учащихся, которые либо вовсе не изучали еще алгебры, либо знакомы лишь с ее начальными основаниями. Однако, сборник на-ряду с этим пригоден, конечно, и для более сведущих учащихся.

Так как настоящий сборник имеет, между прочим, в виду учащихся, незнакомых с алгеброй, то для извлечения квадратного корня в нем указан «способ деления» (иначе называемый

¹⁾ Подробнее о задачах с реальным содержанием при преподавании геометрии — см. книгу «Практические занятия по геометрии. Образцы, темы и материалы для упражнений». Госуд. Издательство.

«способом двух средних») — старинный Геронов прием, достаточно быстро ведущий к цели и незаслуженно преданный забвению. Кроме того, приложены таблицы квадратных (и кубических) корней для чисел от 1 до 1000 и объяснен способ пользования ими.

Для ускорения выкладок рекомендуется при решении многих задач пользоваться приемами приближенных вычислений с числами, близкими к единице, по следующим формулам (в которых a — небольшая дробь):

$$\begin{array}{ll} (1 \pm a)(1 \pm b) = 1 \pm a \pm b; & \frac{1}{1 \pm a} = 1 \mp a \\ (1 \pm a)^2 = 1 \pm 2a & (1 \pm a)^3 = 1 \pm 3a \\ \sqrt{1 \pm a} = 1 \pm \frac{a}{2} & \sqrt[3]{1 \pm a} = 1 \pm \frac{a}{3} \\ \frac{1}{(1 \pm a)^2} = 1 \mp 2a & \frac{1}{\sqrt{1 \pm a}} = 1 \mp \frac{a}{2} \end{array}$$

Формулы эти обосновываются в «Задачнике» геометрически и, для прочного усвоения, иллюстрируются числовыми упражнениями.

Кроме задач в собственном смысле слова, в сборник включены упражнения, имеющие характер практических работ (черчение графиков и т. п.). Такие упражнения выделены особо в конце отделов. Их дополняют «Темы практических работ» — параграфы, содержащие краткий перечень тем, разработка которых предоставляется преподавателю в зависимости от условий и обстановки занятий. — Ради оживления интереса к занятиям, среди прочих упражнений рассеяно несколько десятков задач исторических — из истории математики, — литературных ¹⁾, а также задач, любопытных по сюжету или неожиданных по результату.

¹⁾ Таких задач немного: из «Короля Лиры» (407), «Скупого Рыцаря» (764), «Путешествия Гулливера» (824 и 825) и из рассказа Л. Толстого «Много ли человеку земли нужно?» (597).

Само собою разумеется, что наряду с задачами реального характера следует проделывать упражнения и формальные. Число подобных задач в настоящем сборнике невелико лишь потому, что составитель считал излишним увеличивать объем книги за счет материала, уже представленного во многих сборниках задач по геометрии. (По той же причине мало включалось и задач на построение). Упражнения настоящего сборника предназначаются лишь как *пополнение* обычного материала, а не *замена* его.

Ограниченность технических и общенаучных знаний, которые задачник подобного типа в праве предполагать у учащегося, до крайности затрудняла выбор материала для упражнений. При таких условиях и при почти полной новизне работы, едва ли удалось избежать увлечений и промахов. Они могли бы быть исправлены в последующих изданиях лишь при участии преподавателей, имевших случай пользоваться настоящей книгой. Все указания на этот счет будут приняты составителем с признательностью ¹⁾.

Первое издание этой книги, вышедшее в начале декабря 1922 г., было значительно пополнено во втором издании (сентябрь 1923 г.). В третьем издании (август 1924 г.) проведена была лишь новая нумерация задач и чертежей. Настоящее, четвертое издание перепечатывается с предшествовавшего почти без изменений.

Я. П.

Апрель 1925.

¹⁾ Адрес для корреспонденции: Ленинград, Плуталова 2, кв. 12. Якову Исидоровичу Перельману.

Метрические меры.

1 метр=10 дециметрам=100 сантиметрам=1000 миллиметрам.	
0,47 сажени.	1 километр=1000 метров=0,91 версты. 1 верста=1067 метров. 1 аршин=0,71 метра=71 сантиметру. 1 верш.=4,44 сантиметра; 1 дюйм=2,54 см.
1,41 аршина.	
3,28 фута.	
22,5 вершка.	
39,4 дюйма.	
1 метр= $\frac{1}{40000000}$ земной окружности.	1 куб. дециметр воды весит 1 килограмм. 1 килограмм=1000 граммов=2,44 фунта. 1 грамм=1000 миллиграммов=0,23 золотника. 1 тонна=1000 килограммам=61 пуду. Литр=1 куб. дециметру=1000 куб. сантиметр.

Сокращенные обозначения:

Километр	км	тонна	т
дециметр	дм	килограмм	кг
метр	м	грамм	г
сантиметр	см	миллиграмм	мг
миллиметр	мм	литр	л

(Точка после этих сокращений не ставится).

I. Прямая линия.

Измерение длины отрезков. — Численный и линейный масштабы. —
Сложение и вычитание отрезков. — Пересечение прямых.

1. Часовой отошел от будки вправо на 6 шагов, сделал 9 шагов обратно, затем снова вправо 8 шагов, потом 12 шагов назад и остановился. Во скольких шагах от будки он остановился?

2. Шнурок длиной $2\frac{1}{8}$ метра делится узлом на две части, из которых одна на 2 метра длиннее другой. Какой длины меньшая часть?

3. Отрезок в 12 метров разделен на 2 неравные части. Как велико расстояние между серединами обеих частей?

4. У большинства взрослых людей промежуток между глазами, считая между их внутренними углами, равен ширине глаза, т. е. $3\frac{1}{8}$ сантиметра. Как велико расстояние между серединами глаз (между зрачками)?

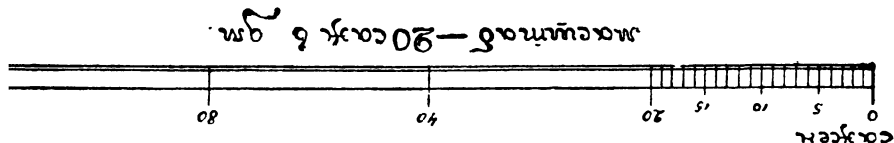
5. Каким *численными* масштабам отвечают следующие *линейные* масштабы:

- 1) 100 метров в 1 сантиметре.
- 2) 1 км в 1 см.
- 3) 250 м в мм.
- 4) 1 верста в 1 дюйме.

6. Прилагаемый чертеж 1 изображает «линейный масштаб» 20 саж. в дюйме. Начертите по этому образцу линейные масштабы:

- 1) 5 м в 1 см.
- 2) 10 км в 1 см.
- 3) 0,01 мм в 1 см.

Какие из этих масштабов уменьшенные и какие увеличенные?



Черт. 1. К зад. № 6.
Линейный масштаб.

7. Высота лошади 2 метра, жираффы — $5\frac{1}{2}$ метров, а исполинского вымершего пресмыкающегося, динозавра, — 12 метров. Изобразите их высоты отрезками в $\frac{1}{100}$ натуральной величины.

8. Средний рост человека 170 см. Самый маленький карлик, о котором имеются сведения, был ростом 40 см; самый высокий великан — 260 см. Изобразите их высоты тремя отрезками в масштабе 2 см в 1 мм. (Какая доля натуральной величины?)

9. Исаакиевский собор в Ленинграде имеет в высоту 103 метра, высочайшее мамонтово дерево — 112 м, Хеопсова пирамида — 137 м, высочайший американский небоскреб — 55-этажный дом в Нью-Йорке — 236 м, Эйфелева башня — 300 м. Изобразите эти высоты отрезками в масштабе 2 метра в 1 мм. (Какая доля натуральной величины?)

10. Изобразите указанные ниже расстояния отрезками в масштабе 200 км в 1 см:

- | | |
|-----------------------------------------|---------|
| От Ленинграда до Москвы | 640 км. |
| » Ленинграда до Мессины | 2700 » |
| » Архангельска до сев. полюса | 2900 » |
| » Нью-Йорка до Чикаго | 1200 » |
| » Бомбея до Калькутты | 1650 » |

11. Выпущенный из руки камень всегда проходит в 1-ю секунду своего падения 5 метров, во 2-ю — 15 м, в 3-ю — 25 м,

в 4-ю — 35. Изобразите, в избранном вами масштабе, пути, проходимые падающим камнем в последовательные секунды.

12. Толщина человеческого волоса—0,05 миллиметра. Многие бактерии имеют в длину 0,004 миллиметра. Начертите рядом обе величины в виде отрезков в 1000 раз больше натуральной величины.

13. Самые высокие облака, *перистые*, плавают на высоте 9000 метров; средняя высота *дождевых* облаков — 1500 м. Высота Казбека—5000 метров. Отметьте эти размеры на прямой линии в масштабе 50 м. в 1 мм. Какому численному масштабу это соответствует? Какую длину должен иметь отрезок, изображающий в том же масштабе высоту атмосферы? (Верхняя граница атмосферы находится в расстоянии около 400 километров от земной поверхности.)

14. Длина черных полосок на черт. 2 изображает скорость. Найдите масштаб этого изображения, если известно, что конькобежец пробегает 10 метров в секунду. Каким скоростям соответствуют остальные изображения?

15. Отложите на прямой линии отрезки, изображающие, в масштабе 1 м в 2 мм, длину паровоза (9,3 метра), тендера (6,8 м) и 6 вагонов, каждый по 7,8 м. Определите измере-



Мотоциклет



Велосипед



Скаковая лошадь



Пароход



Рысистая лошадь



Конькобежец



Искусный бегун



Лыжный ходок



Быстрый пешеход

Черт. 2. К зад. № 14.

Графическая таблица скоростей.

нием, чему равна общая длина поезда, и проверьте вычислением результат этого *графического* сложения.

16. Выполните *графически* следующие действия, т.-е. изобразите данные числа в одинаковом масштабе отрезками, найдите отрезок, равный их сумме (или разности) и определите, какому числу в выбранном вами масштабе он соответствует:

34	5400		
+ 81	+ 1700	81	0,72
74	9300	— 52	— 0,54
<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>

Проверьте полученные результаты непосредственным вычислением.

17. Докажите помощью чертежа, что сумма половин двух отрезков равна половине суммы этих отрезков.

18. Докажите помощью чертежа, что сумма третьих долей двух отрезков равна третьей доле суммы этих отрезков.

19. Точки A , B , C и D лежат на одной прямой. Отрезок $AD = 500$ метрам, отрезок $BC = 200$ метрам. Найти расстояние между серединами отрезков AB и CD .

20. От точки M отложены по одной прямой и в одну сторону 2 отрезка $MA = 100$ см и $MO = 160$ см. Найти расстояние между серединами этих отрезков.

21. Сколько прямых линий можно провести через четыре точки, из которых никакие три не расположены на одной прямой? Через 5 таких точек? Через 20 таких точек?

22. Во скольких точках могут пересечься четыре прямые (требуется указать наибольшее возможное число точек пересечения)? Во скольких точках могут пересечься 6 прямых? 25 прямых?

Практические работы.

23. Начертив произвольную незамкнутую ломаную линию, изобразите, пользуясь циркулем и линейкой, отрезок, равный по длине сумме длин составляющих ее отрезков (т.-е. «выпрямите» эту ломаную).

24. Выпрямите какую-нибудь замкнутую ломаную линию (см. предыдущую задачу).

25. Определите *средний* рост учащихся вашего класса (сложите рост всех учащихся и разделите на их число). Вычислите средний рост учащихся каждого пола и возраста в отдельности.

26. Обыкновенно принимают, что полный размах рук равен росту человека. Проверьте, правильно ли это *в среднем* для учащихся вашего класса. Определите среднюю величину уклонения в ‰ отдельно для каждого пола.

27. Начертите на-глаз отрезок в 10 см. Измерьте его. Как велика *абсолютная* ошибка? (Превышение обозначьте знаком +, недостаток знаком —). Как велика *относительная* ошибка в ‰ от всей длины? Повторите то же с отрезком в 30 см. В каком случае относительная ошибка больше? Уменьшается ли она с упражнением?

28. Разделите произвольно выбранный отрезок пополам на-глаз и проверьте правильность деления непосредственным измерением. Выразите относительную ошибку в ‰ от длины отрезка. Повторите упражнение с отрезками разной длины. Какие отрезки делите вы на-глаз точнее (т.-е. с меньшею относительною ошибкою), короткие или длинные? Влияет ли на величину ошибки *направление* линий?

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя.)

В классе и дома. Изготовление мерного аршина и метра. Обмер предметов классной обстановки. Получение средней величины из нескольких измерений. Отбивание на классной доске прямой линии помощью натертой мелом бечевки. Определение толщины листа бумаги (по толщине книги). Определение масштаба фотографических снимков (например, снимка Луны на черт. 63).

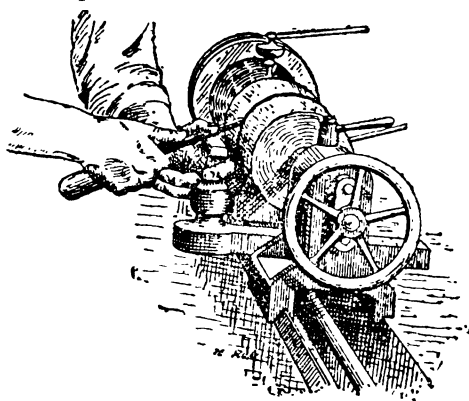
Вне класса. Изготовление мерной веревки, двух колец и 10 бирок к ней. Измерение мерной веревкой коротких расстояний на дворе, в саду, в огороде. Провешивание линий в поле и измерение длинных расстояний. Измерение длины извилистой речки. Определение средней длины шага. Измерения шагами.

Во время экскурсий. Глазомерная оценка расстояний с последующей проверкой непосредственным измерением (шагами или веревкой).

II. Окружность.

29. Как катилась бы телега, если бы ее оси проходили не через центры окружностей колес, а через точки, отстоящие от центра, например, на 10 сантиметров?

30. Можно ли дать такое определение окружности: «замкнутая кривая линия, все точки которой одинаково удалены от одной



Черт. 3. к зад. № 31.
Работа на токарном станке.

точки»? Вообразите четырехугольную фигуру, начерченную на спокойной поверхности воды: все ее точки одинаково удалены от одной точки, именно — от центра Земли; можно ли эту фигуру назвать окружностью? Как надо исполнить приведенное выше определение?

31. На чем основано вытачивание круглых изделий помощью токарного станка (см. черт. 3: резец

остается неподвижным, а обрабатываемый предмет вращается вокруг оси)?

32. Можно ли начертить окружность, держа обе ножки циркуля неподвижно, но двигая бумагу?

33. Садовники чертят на земле окружности помощью веревки, прикрепленной к колышку. Получится ли окружность, если веревка будет при этом наматываться на колышек?

34. Почему окружность не может иметь двух и более центров, т.-е. двух и более точек, каждая из которых одинаково удалена от всех точек окружности?

35. В безветреную погоду звук распространяется в воздухе во все стороны с скоростью $\frac{1}{3}$ километра в секунду. Как расположены относительно стреляющего все те точки, в которых треск был услышан спустя две секунды после выстрела?

36. Люди, стоя на берегу круглого озера, в различных местах его, наблюдают за плывущим на лодке охотником. Звук произведенного им выстрела все наблюдатели слышали одновременно. Где находилась лодка с охотником в момент выстрела?

37. Волны, разбегающиеся по воде от места падения тела, имеют форму кругов. Какое отсюда можно вывести заключение относительно скорости распространения волнения по различным направлениям?

38. В каком масштабе изображает Землю школьный глобус, диаметр которого 26 сантиметров (диаметр земного шара 13000 км). Какой толщины водяной слой соответствовал бы на таком глобусе водной толще океанов (средняя глубина океанов 4 км)? Сравните толщину этого слоя с толщиной листа бумаги (около 0,1 мм).

39. Диаметр переднего колеса великорусской телеги 0,80 метра, заднего 0,90 метра; расстояние между их осями 1,34 метра. Начертите окружности переднего и заднего колес телеги, в надлежащем взаимном удалении, в масштабе $\frac{1}{20}$.

40. Начертите в сто-миллионную долю натуральной величины окружность земного шара и верхнюю границу ее воздушной оболочки (высоту атмосферы примите равной 400 километров).

41. Земля, обращаясь вокруг Солнца, переносится со скоростью 30 км в секунду. Начертите в одинаковом масштабе земной шар и путь, проходимый им в полчаса.

42. Изобразите в одинаковом масштабе окружность Земли и Луны. Диаметр Земли — 13000 км, Луны — 3500 км.

43. Луна обращается вокруг Земли по (почти) круговому пути в расстоянии 380000 км от ее центра. Диаметр Солнца — 1400000 км. Изобразите окружность Солнца и из ее центра

описите окружность, изображающую в том же масштабе круговой путь Луны вокруг Земли.

44. Начертите в одинаковом масштабе поперечный разрез («сечение») волоса в виде круга и рядом — окружность так называемых красных кровяных телец человека. Толщина волоса $\frac{1}{20}$ мм, поперечник кровяного шарика $\frac{1}{125}$ мм.

45. Точка лежит в 30 сантиметрах от центра окружности, радиус которой 25 см. Найти расстояние этой точки до ближайшей к ней точки окружности. Найти расстояние этой точки до самой удаленной от нее точки окружности.

46. Кратчайшее расстояние от некоторой точки до окружности 50 метров, наибольшее 160 метров. Определить радиус этой окружности. Сколько решений имеет эта задача?

47. Даны точки *A* и *B*. Поставить третью точку *C* так, чтобы она находилась в расстоянии 5 см от *A* и 8 см от *B*. Сколько решений может иметь эта задача и всегда ли она возможна?

48. Вы начертили окружность радиусом 6 см и забыли отметить положение центра. Как можете вы разыскать его?

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя.)

В классе и дома. Вырезывание кружков, изображающих в одинаковом масштабе размеры планет.

Вне класса. Изображение на земле, в определенном масштабе, плана солнечной системы (см. зад. № 33).

Во время экскурсий. Наблюдение круговых волн на воде.

III. Углы.

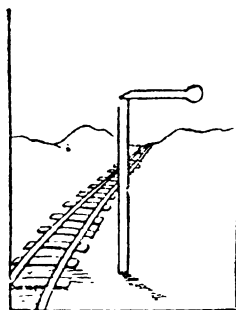
Вертикальное и горизонтальное направления. — Углы смежные и противоположные (вертикальные). — Прямой угол. — Углы по одну сторону прямой и вокруг общей вершины. — Градусное измерение углов. — Понятие о черчении графиков.

49. Станционный семафор (сигнальный железнодорожный столб, — см. черт. 4) имеет «крыло», т.-е. дощечку, подвижно прикрепленную в верхней части столба. Крыло устанавливается трояко:

1) крыло в *горизонтальном* положении — требует остановки поезда у входной стрелки;

2) крыло, поднятое под углом в $1\frac{1}{2}$ прямого, — требует замедления хода и остановки у станции;

3) крыло, опущенное *вертикально*, — разрешает поезду пройти станцию без остановки.



Черт. 4. К зад. № 49
Станционный семафор.

Начертите положение крыла семафора в указанных трех случаях.

50. Можно ли на стене провести и горизонтальную и вертикальную линии? А на полу? На наклонной доске?

51. Как проверить горизонтальность направления помощью отвеса и чертежного треугольника?

52. Гвоздь, торчащий в доске, составляет со своею тенью угол в $\frac{2}{3}$ прямого. Какой угол составляет этот гвоздь с продолжением тени по другую сторону?

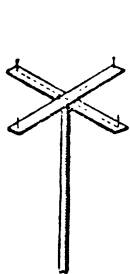
53. Могут ли оба смежные угла быть острыми? А тупыми?

54. Один из смежных углов больше другого на прямой угол. Как велики эти углы? Решить ту же задачу, когда разность углов равна $1\frac{1}{2}$ прямого; $1\frac{1}{2}$ прямых.

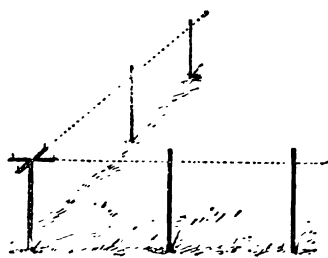
55. Один из смежных углов вдвое больше другого. Определить их величину. Решить ту же задачу, когда угол больше смежного втрое.

56. Простейший способ получения на практике прямого угла состоит в том, что листок бумаги любой формы перегибают определенным образом два раза. Объясните, почему получающиеся при этом углы — прямые.

57. На чертежах 5 и 6 изображен крестообразный *эккер* —



Черт. 5.



Черт. 6. К зад. № 57.

Крестообразный эккер и его употребление.

прибор для провешивания на местности взаимно-перпендикулярных линий. Укажите простейший прием для его проверки.

58. Через вершину прямого угла проведена внутри него прямая линия. Из двух образовавшихся при этом углов один в 3 раза больше другого. Как велик каждый?

59. Какой угол образуют между собой биссектрисы противоположных (вертикальных) углов?

60. Какой угол образуют между собой биссектрисы смежных углов? (*Указание:* ср. с задачей 4-й).

61. Один из углов, образованных пересечением двух прямых линий, равен $1\frac{1}{4}$ прямого угла. Определить остальные углы.

62. Из одной точки проведены в одной плоскости 5 прямых линий. Может ли в числе образовавшихся при этом 5 углов оказаться 4 тупых?

63. Из точки проведены в одной плоскости 5 прямых линий, образовавших вокруг этой точки 5 углов; из них второй больше первого на 0,1 прямого угла; на столько же третий больше второго, четвертый — третьего и пятый — четвертого. Определить величину каждого угла.

64. Снежинка имеет форму звезды, изображенной на черт. 7. Какой угол составляют между собою два соседних луча звезды?

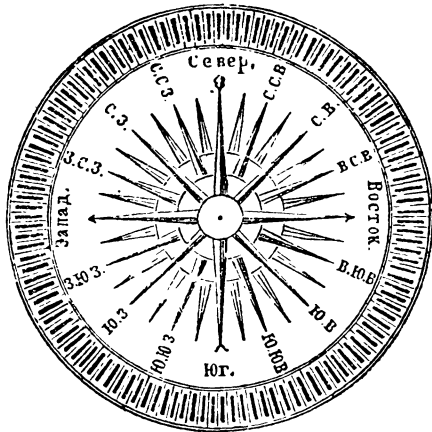
65. Верхушка растущего стебля хмеля, обвиваясь вокруг палки, сделала полный оборот в течение 2 часов. На какой угол, в среднем, поворачивалась верхушка каждую минуту? Как долго надо было ждать, чтобы она повернулась на 20° ?

66. Окружность разделена тремя точками на части, относящиеся как 2 : 3 : 7. Определить величину дуг в градусной мере.

67. Древний математик Эратосфен, в Египте (III век до нашей эры), первый определил длину окружности Земли. Он



Черт. 7. К зад. № 64.
Снежинка (увелич.).



Черт. 8. К зад. № 72.
Дно коробки компаса.

исходил из того, что города Александрия и Сисена (современный Ассуан) лежат на одном меридиане в $7^\circ 12'$ друг от друга. Расстояние между этими городами, по его сведениям, равно 5000 египетских путевых мер — стадий. Отсюда Эратосфен вычислил, что окружность земного шара = 250000 стадий. Верен ли этот расчет в стадиях?

68. Морская миля равна длине одной минуты дуги меридиана. Зная, что метр есть 40-миллионная доля длины земного меридиана, определить длину морской мили в метрах.

69. Десятая доля морской мили (см. пред. задачу) называется «кабельтов». Определить длину «кабельтова» в метрах и в дуговых мерах.

70. На каком расстоянии друг от друга должны висеть два отвеса, чтобы образовать между собою угол в 1° ? В $1'$? В $1''$? Окружность земного шара = 40000000 м.

71. Ось земного шара отклонена на $23^\circ 27'$ от перпендикуляра к плоскости его обращения вокруг Солнца. На сколько этот угол отличается от $\frac{1}{4}$ прямого угла?

72. Рассмотрите изображенное на черт. 8 дно коробки компаса, где указаны различные направления по странам горизонта. Какой угол составляют между собою следующие направления («румбы»):

С и СВ?	ССВ и СВ?
Ю и СВ?	ССВ и ВЮВ?
В и ЮЗ?	В и ЗЮЗ?
СЗ и СВ?	ЗСЗ и ЮЮЗ?

73. При проведении новых улиц следует, для наилучшего их проветривания, давать им направление с северо-востока на юго-запад и перпендикулярное к нему. Какое направление должны иметь эти последние улицы?

74. В одной точке пересекаются три прямые линии, образуя 6 углов. Один из них = 40° , другой = 50° . Вычислить остальные углы.

75. У поврежденного транспорта уцелела только дуга в 90° . Можно ли таким транспортом измерять и чертить тупые углы?

76. Через вершину угла в 40° проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе этого угла. Какие углы она составляет со сторонами угла?

77. Биссектриса угла в 60° продолжена за вершину. Какие углы она составляет со сторонами угла?

78. Какой угол составляют между собою соседние хребты пятилучевой морской звезды? Существуют виды морских звезд, обладающие 7-ю и 11-ю лучами, симметрично расположенными; какой угол составляют между собою направления соседних лучей у таких звезд?

79. Колесо экипажа имеет 16 спиц. Какой угол составляют между собою направления двух соседних спиц?

80. Из одной точки исходят 4 прямые линии, образующие 4 угла. Второй больше первого вдвое; во столько же раз третий больше второго и четвертый больше третьего. Определить величину каждого угла.

81. Какой угол образуют между собою направления стрелок часов в 3 часа? В 4 часа? В 1 час? В 5 часов?

82. Какой угол описывает минутная стрелка в 10 минут времени? Часовая стрелка в 20 минут времени?

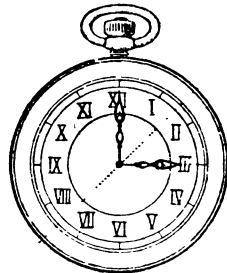
83. На какой угол поворачивается минутная стрелка, пока часовая проходит $1^{\circ} 30'$?

84. Какова «угловая скорость» минутной стрелки, т.-е. какой угол описывает в секунду времени минутная стрелка? Какова угловая скорость часовой стрелки часов?

85. Маховое колесо делает 50 оборотов в минуту. Какова его угловая скорость, т.-е. какую дугу, в градусной мере, описывает каждую секунду каждая точка его окружности?

86. Что больше: угловая скорость вращения Земли вокруг оси или угловая скорость вращения часовой стрелки часов? Во сколько раз?

87. Найти направление на юг при помощи карманных часов можно следующим образом (см. черт. 9): держа часы так, чтобы часовая стрелка была направлена к Солнцу (о чем легко судить по направлению тени от оси стрелок), делят пополам угол, образованный направлением стрелки и направлением линии VI—XII. Биссектриса укажет направление на юг (приблизительно). На чем основан этот прием (см. пред. задачу)? Как воспользоваться компасом для приблизительного определения времени дня?



Черт. 9. К зад. № 87
Нахождение направления стран горизонта помощью карманных часов.

Практические работы.

88. Начертите в масштабе $\frac{1}{2}$ вершка в 1 миллиметре боковой вид лестницы из 6 ступеней; высота ступени — 4 вершка, ширина — 9 вершков.

89. Прилагаемая таблица показывает, как меняется рост человека с возрастом (средние данные для мужского пола):

Возраст:	Рост:
10 лет	128 см.
12 »	136 »
14 »	149 »
16 »	161 »
18 »	170 »
20 »	171 »

Изобразите эту таблицу *графически* следующим образом. На горизонтальной линии отложите от некоторой точки *A* пять равных отрезков, например, в 1 см. Полученные точки *A, B, C, D, E, F* соответствуют возрасту 10 лет, 12 л., 14 л., 16 л., 18 л. и 20 л., а отрезки между ними — промежутку времени в 2 года. В точке *A*, отвечающей 10-летнему возрасту, восставьте перпендикуляр и отложите на нем отрезок *AM*, изображающий рост 128 см в масштабе, например, 5 см в 1 миллиметр. В точке *B* также восставьте перпендикуляр и отложите на нем в том же масштабе 136 см. Далее, на перпендикулярах из *C, D, E* и *F* отложите, в масштабе, 149, 161, 170 и 171 см. Вершины перпендикуляров соедините прямыми линиями: полученная ломаная есть график изменения роста людей в возрасте от 10 до 20 лет. (Построение графика значительно упрощается при пользовании клетчатой бумагой.)

90. Постройте график роста мальчиков до 10-летнего возраста, пользуясь прилагаемой табличкой:

	Рост:		Рост:
Новорожденный . .	50 см.	В возрасте 6 лет . . .	105 см.
В возрасте 1 года .	70 »	» » 7 » . . .	111 »
» » 2 лет . .	80 »	» » 8 » . . .	117 »
» » 3 » . .	86 »	» » 9 » . . .	123 »
» » 4 » . .	92 »	» » 10 » . . .	128 »
» » 5 » . .	100		

91. Сосна, растущая в лесу, достигает у нас на севере следующей высоты (средние данные для Ленинградской губ.):

В возрасте:	Аршин:
20 лет	9
30 »	13
40 »	17
50 »	21
60 »	24
70 »	27
80 »	30
90 »	32
100 »	34
120 »	37

Составьте по этим данным график хода роста сосны от 20-ти до 120-ти лет.
(См. зад. № 89 и 90.)

92. Постройте на одном чертеже графики возрастания среднего веса человеческого тела для обоих полов по следующим данным:

Возраст.	Вес тела в килограммах.	
	Мужчин.	Женщин.
10	26	24
11	28	26
12	31	30,5
13	35	34,5
14	40,5	38
15	46,5	41
16	53	44,6
17	57,4	49
18	61	53
19	63	54,4
20	65	54,4

93. Здесь приведена табличка изменения дневной температуры воздуха в течение одной летней недели:

Дни недели:	Вс.	Пнд.	Вт.	Ср.	Ч.	Птн.	Сб.
Температура	17°	14°	18°	20°	20°	23°	21°

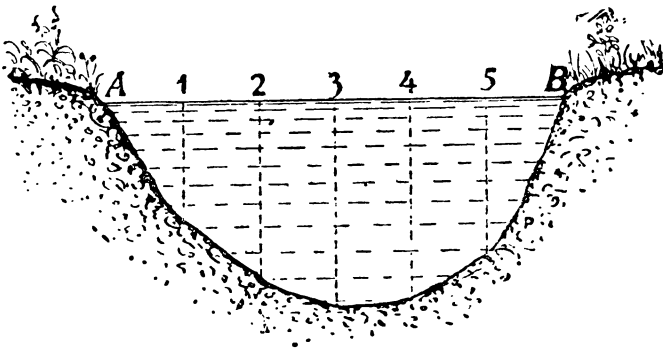
Начертите график температуры, обозначая дневной промежуток отрезком в 1 см, а градус температуры — отрезком в 5 миллиметров.

94. Начертите на-глаз прямой угол и проверьте чертеж транспортиром. Определите погрешность. Влияет ли на величину погрешности направление сторон прямого угла?

95. Придумайте способ измерить угол наклона главных штрихов вашего почерка с направлением строки и выполните это измерение. В каких пределах колеблется величина наклона?

96. Измерьте, какой (приблизительно) угол составляют между собою направления указательного и среднего пальцев при наибольшем их удалении друг от друга.

97. Вытянув руку горизонтально, опишите ею наибольший угол, какой возможно; придумайте способ измерить приблизи-



Черт. 10. К зад. № 99.
Живое сечение ручья.

тельно этот угол у себя и у ваших товарищей. У всех ли он одинаков?

98. Измерьте скорость течения воды на поверхности ручья. Выбрав прямую часть русла, отмерьте на берегу, по прямой линии вдоль течения, 20 или 40 метров и восставьте на ее концах перпендикуляры к ней, отметив их двумя парами вех. Пустите по воде поплавков (бутылку, загруженную в воду по горлышко) и наблюдайте по часам время, в течение которого поплавок проплывет расстояние между концами отмеренной линии, т.-е. отметьте моменты, когда поплавок пересечет створы обеих пар вех. Измерение произведите в безветренную погоду и возьмите средний результат из нескольких определений. — Полученная скорость течения *на поверхности* ручья есть *наибольшая*

из тех, с какою движутся частицы воды в ручье: слой, лежащий ниже, течет медленнее. *Средняя* скорость течения воды во всей реке составляет обыкновенно около 0,84 скорости на поверхности.

99. Определите форму так называемого «живого сечения» неглубокого ручья, т.-е. начертите фигуру занятого водою поперечного сечения ручья. Для этого разделите линию, перпендикулярную к направлению течения, на несколько равных частей и в точках деления промерьте шестом глубину; затем начертите фигуру сечения в определенном масштабе (см. черт. 10).

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя.)

В классе и дома. Проверка чертежного треугольника и столярного наугольника. Проверка по отвесу вертикальных направлений—стоек классной доски, ребер шкафа, края открытой двери, оконного косяка и т. п. (следует наблюдать, чтобы грузик отвеса не касался предмета; качание отвеса успокаивают легким движением руки, держащей отвес, в сторону движения грузика). Проверка горизонтального направления помощью отвеса и прямоугольного треугольника (см. зад. № 51).— Построение углов заданной величины по транспортиру. Черчение углов заданной величины на-глаз с последующей проверкой по транспортиру. «Проверка» транспортиром свойств смежных углов, противоположных углов и др. (собственно: проверка транспортира свойствами смежных углов, противоположных и др.).—Изготовление простейшего угломерного прибора—упрощенной астролябии из большого картонного транспортира и двух деревянных линеек с вбитыми на их концах тонкими булавками. Изготовление крестообразного эскера. Черчение плана классной комнаты. Черчение графиков.

Вне класса. Проверка эскера. Провешивание взаимно-перпендикулярных линий (восстановить перпендикуляр в данной точке прямой, опустить перпендикуляр из данной точки на прямую).—Приблизительное измерение углов между направлениями помощью компаса. Работа с самодельной астролябией: измерение и построение углов на местности. Изготовление плана школьного здания, двора, огорода. Съёмка эскером небольших участков неправильной формы.

Во время экскурсий. Ориентирование по странам горизонта с помощью компаса, с помощью карманных часов (зад. № 87); определение времени дня помощью компаса (зад. № 87).—Производство так называемой маршрутной съёмки пройденного пути. Последняя работа выполняется так: в месте выхода из города определяют по компасу направление на ближайший этап пути—строение, дерево, валун, верстовой столб и т. п.—

и наносят это направление по глазомеру на бумагу, записывая соответствующий «румб». Идя по этому направлению, измеряют его шагами; отложив, в произвольном масштабе, это расстояние на плане с пометкой длины, определяют по компасу направление линии до следующего этапа, измеряют ее шагами и т. д.; по этому черновому наброску и числовым пометкам на нем изготовляют дома более аккуратно маршрутный план экскурсии; замеченные по пути отдельные места в стороне от маршрута также могут быть нанесены на этот план, если были определены направления на них и измерены соответствующие расстояния.

IV. Треугольник.

Стороны и периметр треугольника. — Три случая равенства треугольников. — Равенство прямоугольных треугольников. — Перпендикуляр из середины отрезка, как геометрическое место. —

Биссектриса угла, как геометрическое место.

100. Возможны ли треугольники со сторонами:

- а) 1, 2 и 3 метра? в) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ см?
б) 2, 3 и 4 километра? г) $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ м?

101. Возможен ли равнобедренный треугольник, основание которого 1 сажень, а каждая боковая сторона — 1 метр? Метр = $22\frac{1}{2}$ вершка.

102. Периметр треугольника 19 метров. Одна сторона короче другой на 1 метр и длиннее третьей на 3 метра. Найти длину каждой стороны.

103. Обвод треугольного участка $25\frac{1}{4}$ м. Одна сторона его составляет $\frac{3}{4}$ другой и вдвое больше третьей. Найти длину каждой стороны.

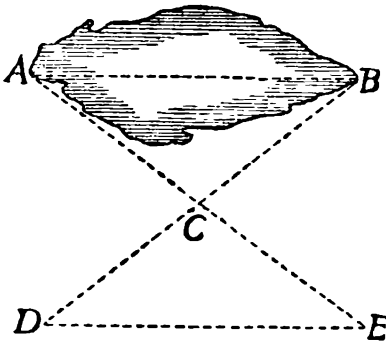
104. Огород имеет форму равнобедренного треугольника, одна сторона которого на 40 м длиннее другой. Обвод огорода — 200 м. Какую длину имеет каждая сторона? Сколько решений имеет эта задача?

105. Участок имеет форму равнобедренного треугольника с обводом 270 саж. Длинная сторона вчетверо длиннее короткой. Какой длины каждая сторона участка? Сколько решений имеет эта задача?

106. Чтобы определить ширину AB озера (черт. 11), выбирают такую точку C , из которой видны обе крайние точки озера A и B . Провешивают прямые линии ACE и BCD , отмерив

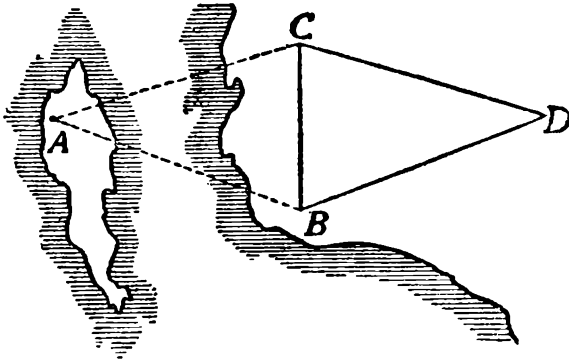
$CE=CA$ и $CD=CB$. Расстояние DE —искомой ширине озера AB . Почему?

107. Чтобы определить расстояние от точки B до недоступной точки A (черт. 12), провешивают произвольную прямую BC , измеряют углы ABC и ACB и, построив их по другую сторону BC , провешивают прямые BD и CD : расстояние точки их пересечения D до точки B равно искомому расстоянию BA . Почему? Можно ли для той же цели построить при точке B угол ACB , а при точке C угол ABC ? Чему в этом случае равно искомое расстояние.



Черт. 11. К зад. № 106.

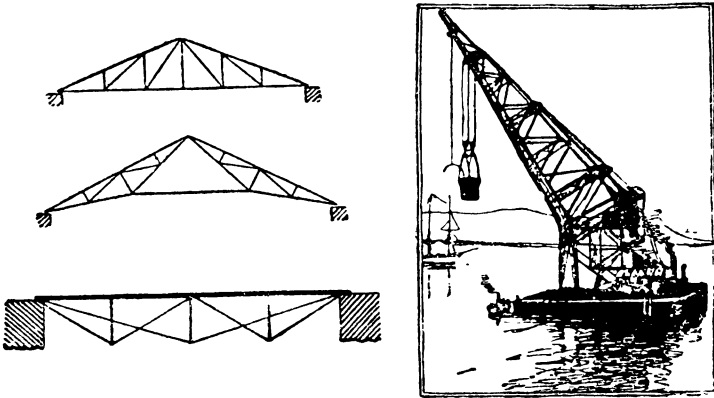
108. При сооружении кровель, мостов, подъемных кранов и т. п. обыкновенно соединяют их опорные брусья и балки так, чтобы они образовали систему треугольников с неподвижно закрепленными вершинами (см. черт. 13). Почему такой способ соединения балок обеспечивает неизменность формы сооружения?



Черт. 12. К зад. № 107.

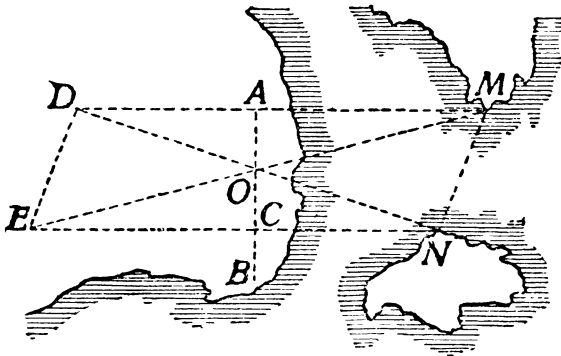
109. Чтобы разделить данный отрезок пополам, пользуются следующим построением: на концах данного отрезка восставляют перпендикуляры в разные стороны и откладывают на них от осно-

вания равные отрезки. Концы отрезков соединяют прямой: она делит данный отрезок пополам. На чем основан этот прием?

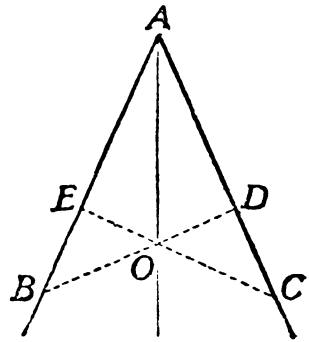


Черт. 13. К зад. № 108.

Треугольное расположение опорных балок под кровлями, мостом и в подъемном кране.



Черт. 14. К зад. № 110.



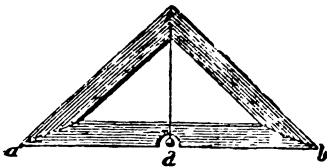
Черт. 15. К зад. № 112.

110. На черт. 14 изображен один из способов определения расстояния между недоступными точками M и N . Избирают произвольную точку A и помощью эккера провешивают прямую AB перпендикулярно к MA . Затем, помощью эккера же, находят

на AB основание C перпендикуляра NC на прямую AB . Делят отрезок AC пополам в точке O и проводят прямые MO и NO , продолжая их до пересечения с продолжениями прямых MA и NO в точках D и E . Докажите, что расстояние $DE =$ расстоянию MN .

111. Чтобы разделить данный на местности угол пополам, отмеряют на сторонах угла от его вершины равные расстояния и концы соединяют прямой. Прямая, соединяющая середину этой линии с вершиной, делит данный угол пополам. На чем основан этот способ?

112. Другой прием (см. пред. зад.) деления пополам угла, данного на бумаге или на местности, состоит в том, что откла-



Черт. 16. К зад. № 113.
Ватерпас.

дывают от вершины по сторонам данного угла (черт. 15) две пары равных отрезков $AB = AC$ и $AD = AE$. Соединяют (накрест) B с D и E с C , и точку пересечения O прямых BD и EC соединяют с вершиной угла прямой линией: она и будет биссектрисой данного угла. На чем основан этот прием?

113. На черт. 16 изображен небольшой плотничный «ватерпас» — прибор для проверки горизонтальности линий. Докажите, что если точка прикрепления отвеса одинаково удалена от концов основания ватерпаса, то при горизонтальном положении основания отвес делит его пополам.

114. Землемеры иногда пользуются следующим приемом восстановления на местности перпендикуляра к данной прямой в данной точке. В равных расстояниях по обе стороны от данной точки на данной прямой вбивают по колышку, прикрепляют к ним концы веревки и, взяв ее за середину, туго натягивают. Прямая, соединяющая вершину образованного веревкой треугольника с данной точкой, есть искомый перпендикуляр. На чем основан этот прием?

115. Три селения A , B и C не лежат на одной прямой. Укажите на чертеже, как провести прямую дорогу из A , чтобы кратчайшие расстояния до нее от селений B и C были одинаковы.

116. В пределах земельного участка имеется два колодца. Укажите на чертеже, как найти на участке все те точки, которые удалены от обоих колодцев одинаково.

117. В стороне от круглого пруда с пустынными берегами повешены два одинаковых фонаря. Укажите на чертеже, из каких мест берега фонари кажутся одинаково яркими? Сколько таких пунктов? При всяком ли расположении фонарей они существуют?

118. В лесу поют две кукушки, сидящие по разные стороны извилистой тропинки. Укажите на чертеже те места тропинки, куда пение обеих кукушек доносится одинаково громко.

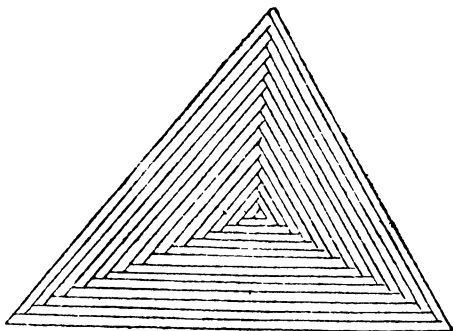
119. Два селения лежат в стороне от железной дороги на неодинаковых от нее расстояниях. Покажите на чертеже, где должна быть устроена железнодорожная станция, если желательно, чтобы она была одинаково удалена от обоих селений. (Рассмотрите два случая: когда оба селения расположены по одну сторону от дороги и когда они лежат по разные стороны от нее.)

120. В каком месте пезастроенного треугольного двора нужно поместить фонарь, чтобы все углы двора освещались им одинаково?

121. Многоугольный незастроенный двор обнесен забором, на серединах трех несмежных сторон которого устроены ворота. Покажите на чертеже, где надо поместить фонарь, если желают, чтобы он одинаково ярко освещал все трое ворот.

122. Найти на стороне треугольника точку, одинаково отстоящую от двух других его сторон.

123. Большая поляна среди леса имеет форму треугольника. Где должен поместиться на ней наблюдатель, чтобы услышать эхо своего возгласа одновременно от всех трех стен леса?



Черт. 17. К зад. № 125.

Фигурная пахота треугольного участка.

124. Вдоль трех сторон пятиугольного участка земли течет канава. Покажите на чертеже, как найти то место внутри поля, которое одинаково удалено от воды в канаве? Всегда ли такое место существует?

125. При так называемой *фигурной пахоте* плугом пахарь проводит борозды вдоль межииков поля (см. черт. 17), начиная пахать с краев. Становясь у какого-нибудь угла полевого клина, пахарь начинает пахать, отваливая пласт борозды на соседний участок, и, дойдя до другого угла, поворачивает вдоль другой стороны; так обходит он весь участок, возвращаясь к углу, с которого была начата борозда. Вторую борозду он проводит рядом с первой, сваливая пласт в первую борозду. Проводя борозду за бороздой, пахарь подвигается внутрь участка, пока не распашет его до конца.— Можете ли вы приблизительно указать заранее то место внутри *треугольного* полевого клина, где фигурная пахота должна окончиться?

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя.)

В классе и дома. Изготовление ватерпаса из картонного или деревянного равнобедренного треугольника и проверка по нему горизонтальных направлений.

Вне класса и во время экскурсий. Практическое выполнение построений, описанных в задачах №№ 106, 107, 109, 110, 111, 112, 114, 120 и 121.

В здании с сложными стропильными фермами (вокзал, завод, большой навес), а также у моста, подъемного крана и т. п. сооружений—рассмотреть соединение опорных балок (обратить внимание на треугольное расположение, зад. № 108).

V. Углы при параллельных прямых.

126. Сколько углов различной величины образуется при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой? Могут ли при этом образоваться только равные между собой углы?

127. Могут ли при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой образоваться только острые углы? Тупые? Прямые?

128. На чем основан способ проведения параллельных помощью линейки и чертежного треугольника, изображенный на черт. 18. Как иначе можно расположить при этом линейку и треугольник?

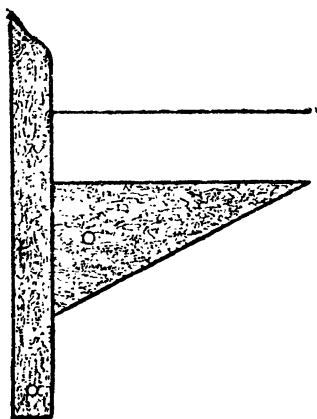
129. Можно ли чертить параллельные прямые помощью линейки и транспортира?

130. Как провешивать на земле параллельные линии помощью экера? Без экера или какого-либо угломерного прибора?

131. Прямая пересекает две параллельные прямые; один из образовавшихся углов $= 1^\circ$. Найти остальные.

132. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, больше одного из остальных на 10° . Найти все углы.

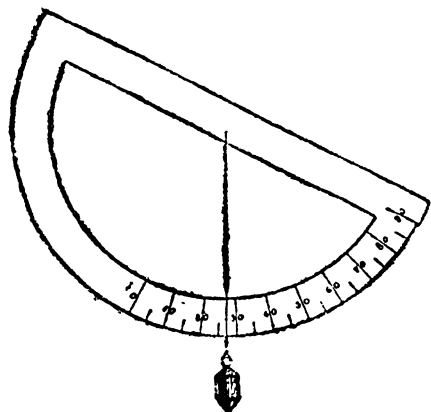
133. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, втрое больше одного из остальных. Найти все углы.



Черт. 18. К зад. № 128.
Проведение параллельных
линий помощью линейки
и чертежного треугольника.

134. Какой угол образуют между собою биссектрисы соответственных углов при параллельных линиях? Биссектрисы накрест-лежащих?

135. Из точки внутри угла проведены две прямые: одна параллельно одной стороне угла, вторая — перпендикулярно другой стороне. Какой угол образуют между собою эти прямые?



Черт. 19. К зад. № 137.
Прибор для измерения угла наклона
линии зрения с горизонтальной.

136. Как найти угол между непараллельными прямыми, точка пересечения которых лежит за пределами чертежа?

137. На черт. 19 изображен простой прибор для измерения угла наклона линии зрения на какой-нибудь предмет с горизонтальным направлением: смотрят на предмет вдоль линейки транспортира и замечают, какое деление покрывает при этом шнурок отвеса: отсчет дает искомый угол наклона. На чем основан этот прием?

138. Может ли прямая пересечь под равными односторонними углами две непараллельные прямые? Как провести такую прямую? Рассмотрите два случая: когда данные непараллельные прямые пересекаются в пределах чертежа и когда они пересекаются за его пределами.

Темы практических работ.

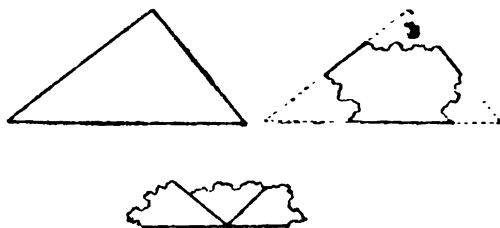
(Указания для преподавателя.)

Изготовление прибора, изображенного на черт. 19, и пользование им (зад. № 137). — Выполнение на местности упражнения зад. № 130. — На скрещении рельсовых путей рассмотреть равные углы между рельсами.

VI. Углы треугольника.

Сумма углов треугольника. — Прямоугольный треугольник с углом в 45° . — Прямоугольный треугольник с углом в 30° .

139. Углы бумажного треугольника оторваны и вплотную приложены вершинами друг к другу (см. черт. 20). Почему свободные стороны углов образуют при этом прямую линию?



Черт. 20. К зад. № 139.

140. Возможен ли треугольник с тремя тупыми углами? С двумя тупыми? С двумя прямыми? С тремя углами, каждый из которых меньше $\frac{1}{2}$ прямого?

141. Возможен ли прямоугольный равносторонний треугольник? А равнобедренный?

142. Может ли при основании равнобедренного треугольника лежать тупой угол? При вершине?

143. В прямоугольном треугольнике один из острых углов больше другого на 20° . Как велики эти углы?

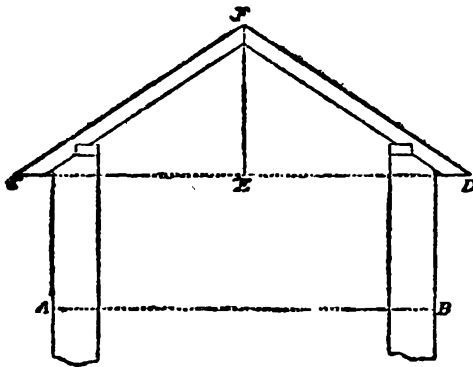
144. В прямоугольном треугольнике один из острых углов втрое больше другого. Как велики эти углы?

145. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 5° . Найти остальные углы.

146. Один угол равнобедренного треугольника в $2\frac{1}{2}$ раза больше другого. Найти величину каждого угла. Сколько решений имеет эта задача?

147. Один угол равнобедренного треугольника равен сумме остальных. Найти величину каждого угла.

148. Угол CFD между стропильными ногами двускатной крыши (черт. 21) равен 120° . Какие углы составляют стропильные ноги FC и FD с горизонтальной прямой CD , соединяющей их концы?



Черт. 21. К зад. № 148.
Боковой вид двускатной крыши; FC
и FD — стропильные ноги.

149. Кровля, в зависимости от материала, из которого она сделана, должна быть наклонена к горизонтальной линии под различными углами, а именно:

К р о в л я .	Угол.
Железные, цинковые .	30°
Голые	18°
Черепичные желобча-	
тые	40°
Тесовые	45°
Соломенные	60°

Какой угол составляют между собою в каждом из этих случаев стропильные ноги двускатной кровли?

150. Внешний угол равнобедренного треугольника 125° . Найти внутренние углы (рассмотреть два случая: когда данный угол прилежит к углу при основании и когда он прилежит к углу при вершине).

151. В треугольнике один угол на 35° меньше другого и на 20° больше третьего. Найти величину каждого угла.

152. Как велики углы треугольника, если они относятся как $1:2:3$?

153. Как велики углы треугольника, если один из них в $1\frac{1}{2}$ раза больше другого и на 20° меньше третьего?

154. Один угол треугольника $= 30^\circ$. Какой угол составляют между собою биссектрисы двух других углов?

155. Докажите, что угол при основании равнобедренного треугольника равен половине внешнего угла при вершине. Как воспользоваться этим, чтобы найти половину данного угла? Чтобы найти угол, вдвое больший данного острого угла?

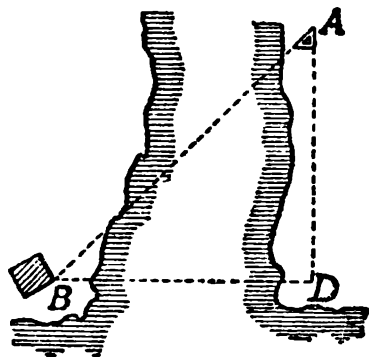
156. Какой угол образуют между собой биссектрисы односторонних углов при параллельных?

157. Как без транспортира построить углы: в 60° , в 30° в 15° , в 75° , в 120° , в 150° ?

158. Как разделить прямой угол на три равные части?

159. В равнобедренном треугольнике основание вдвое больше высоты. Найти углы этого треугольника.

160. Определить (см. черт. 21, к зад. № 148) угол наклона стропильных ног FC и FD к прямой CD в том случае, когда подъем FE равен половине расстояния CD .



Черт. 22. К зад. № 161.

161. На чертеже 22 изображен способ измерения расстояния BD до недоступного предмета B помощью деревянного (или картонного) равнобедренного прямоугольного треугольника. Треугольник помещают в точке D так, чтобы при «визировании» вдоль одного катета была видна точка B . По направлению другого катета проводят прямую DA и находят на ней такую точку A , откуда при «визировании» вдоль гипотенузы виден недоступный предмет B . Искомое расстояние BD равно AD . Почему?

162. Можно ли способом, указанным в предыдущей задаче, определить высоту дерева? Как это сделать?

163. Открытие свойства углов при основании равнобедренного треугольника приписывается греческому мудрецу Фалесу, жившему за шесть веков до нашей эры. Во время своего путешествия в Египет он, по преданию, изумил египетского царя

тем, что определил высоту пирамиды по длине ее тени. Для этого, по свидетельству одного древнего писателя, он избрал тот час дня, «когда наша тень равна нам по длине»; в этот момент лучи солнца, человек и его тень составляют равнобедренный прямоугольный треугольник и, следовательно, лучи пересекаются со своею тенью под углом в 45° (почему?). Как мог воспользоваться этим знанием Фалес для определения высоты пирамиды по ее тени?

164. Вы рассматриваете висящую на стене большую картину, стоя против ее середины в расстоянии $\frac{1}{2}$ ее ширины. Какой угол составляют между собою прямые линии, проведенные от вашего глаза к правому и левому краям картины?

165. Доска прислонена к стене так, что ее подъем равен горизонтальному расстоянию от ее нижнего конца до стены. Какой угол она составляет с горизонтальным направлением?

166. Во время землетрясений измеряют помощью особых приборов тот угол, под которым в данном месте подземный толчок встретил горизонтальную поверхность земли («угол выхода»). Допустим, что в некотором случае этот угол равнялся 45° , а место вершины угла было удалено на 300 километров от того места на земной поверхности, где землетрясение началось раньше всего. Определите, как глубоко под землей залегает тот очаг, из которого исходили в указанном случае подземные толчки. (Предполагается, что в толще земной коры толчок распространяется прямолинейно.)

167. Докажите, что катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

168. Можно ли воспользоваться свойством прямоугольного треугольника с углом в 30° (зад. № 167), чтобы измерять расстояния до недоступного предмета, подобно тому, как пользуются для этой цели равнобедренным прямоугольным треугольником (см. зад. 161)?

169. Длина стропильной ноги вдвое больше высоты FE (черт. 21) стропильной фермы. Определить угол наклона такой кровли к горизонту.

170. Наклон лестницы считается *крутым*, если ее направление составляет с горизонтальной линией угол в 35° и более, *средним*, если этот угол $= 30^\circ$, и *пологим*, если угол $= 25^\circ$

и менее. Имеется лестница, высота подъема которой равна половине ее длины; каков ее наклон — крутой, средний или пологий? Каков наклон лестницы, основание которой равно высоте ее подъема?

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя.)

В классе и дома. «Проверить» транспортиром свойство суммы углов в треугольниках различной формы. — Начертить боковой вид кровель, перечисленных в задаче № 149. — Убедиться на чертежах в свойствах прямоугольных треугольников с углом в 45° и 30° . — Черчение без транспортира углов в 60° , 30° , 15° , 75° , 120° , 150° (зад. № 157). — Деление, без транспортира, прямого угла на 3 и на 6 равных частей (зад. № 158).

Во время экскурсий. Определять недоступные расстояния и высоты, пользуясь свойствами прямоугольных треугольников с углом в 45° и в 30° (ср. задачи №№ 161 — 163 и 168).

VII. Углы и диагонали многоугольника.

171. Сколько может быть острых углов в четырехугольнике? Прямых? Тупых? Начертите те случаи, которые возможны.

172. Чему равен каждый угол квадрата? Правильного пятиугольника? Правильного восьмиугольника? Правильного десятиугольника?

173. При механической обработке металлов употребляется особый угольник, называемый «шестиугольником»; он состоит из двух соединенных под углом линеек и служит для проверки правильности *шестиугольных* гаек, головок болтов и т. п. Под каким углом соединены между собою линейки этого угольника?

174. Имеются ли в правильном шестиугольнике параллельные стороны? В правильном пятиугольнике?

175. Возможен ли шестиугольник с шестью острыми углами?

176. Определить углы четырехугольника, в котором один угол на 10° больше другого, на 20° меньше третьего и вдвое больше четвертого.

177. Древнему греческому математику Пифагору (VI век до нашей эры) приписывается, между прочим, доказательство следующего положения:

«Совокупность шести равносторонних треугольников, или четырех квадратов, или трех шестиугольников (правильных) вполне заполняет плоскость вокруг одной точки».

Справедливо ли это положение?

178. Можно ли сплошь покрыть пол плитками в форме правильных пятиугольников? Правильных восьмиугольников?

179. Можно ли покрыть сплошь пол плитками в форме правильных шестиугольников и равносторонних треугольников?

180. Можно ли сплошь покрыть пол плитками в форме квадратов и таких правильных восьмиугольников, стороны которых равны сторонам квадратов?

181. Можно ли покрыть сплошь пол плитками в форме правильных шестиугольников и равносторонних четырехугольников?

182. Сколько сторон имеет многоугольник, сумма углов которого равна 540° ? 56 прямых? 1800° ?

183. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, внешний угол которого равен 30° ?

184. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, внутренний угол которого вдвое больше внешнего?

185. У какого правильного многоугольника внутренний угол вдвое меньше внешнего?

186. Сколько диагоналей можно провести из каждой вершины пятиугольника? 20 -угольника?

187. Сколько всех диагоналей можно провести в пятиугольнике? В семиугольнике? В десятиугольнике?

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя).

В классе и дома. Проверка на чертежах, помощью транспортира, правильности вычисления суммы углов многоугольников. Черчение паркетов из равносторонних треугольников, квадратов, правильных шестиугольников (в последнем случае предварительно чертят сеть равносторонних треугольников).

Вне класса. Измерение самодельным угломерным прибором суммы углов многоугольного участка и сравнение ее с вычисленной. Накладка на транспортир измеренного на местности многоугольного участка.

VIII. Параллелограмм.

Свойства углов, сторон и диагоналей параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата.—Свойства прямой, проведенной через середину стороны треугольника параллельно другой стороне.—Пересечение непараллельных прямых рядом равноотстоящих параллельных.

188. Может ли в параллелограмме быть три острых угла? Только один острый?

189. Может ли в трапеции быть три тупых угла? Три острых? Только один острый? Только один прямой?

190. Один из углов параллелограмма $= \frac{1}{3}$ прямого. Определить остальные углы.

191. Один из углов параллелограмма на 30° больше одного из остальных. Определить все углы.

192. Участок имеет форму параллелограмма, обвод которого 125 м. Одна из сторон на 15 м длиннее одной из остальных. Определить стороны.

193. Сколько квадратов различных размеров начерчено на фиг. 23? Сколько прямоугольников различных размеров?

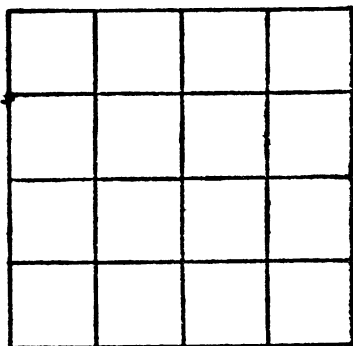
194. На черт. 24 изображен поучительный пример «обмана зрения»: отрезок AC кажется заметно длиннее отрезка BC , между тем как в действительности они равны. Как начерчена эта фигура?

195. Почему следы колес телеги, едущей по прямолинейному направлению, параллельны?

196. Почему стержни, поддерживающие чашки столовых весов, изображенных на черт. 25 (весы Роберваля), сохраняют, при качании коромысла, отвесное направление?

197. Почему в весах для писем (черт. 26) стержень, поддерживающий чашку, сохраняет при качании отвесное направление?

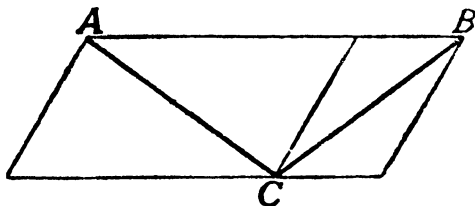
198. Через вершины четырехугольника $ABCD$ (сделайте чертёж) проведены параллельные прямые и на них отложены по одному направлению равные отрезки $AA' = BB' = CC' = DD'$. Точки A' , B' , C' и D' соединены прямыми. Доказать, что четырехугольник $A'B'C'D' = ABCD$ (т.-е. что стороны и углы одного четырехугольника соответственно равны сторонам и углам другого).



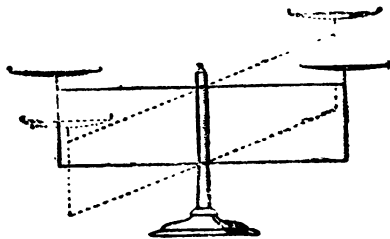
Черт. 23. К зад. № 193.
Сколько здесь квадратов и сколько прямоугольников?

199. Провешиваемая на местности прямая упирается в здание. Как продолжить прямую за здание?

200. В механике доказывается, что если тело участвует одновременно в двух движениях, направления которых составляют между собою угол, — например (см. черт. 27) должно двигаться



Черт. 24. К зад. 194.
Что длиннее: AC или BC ?



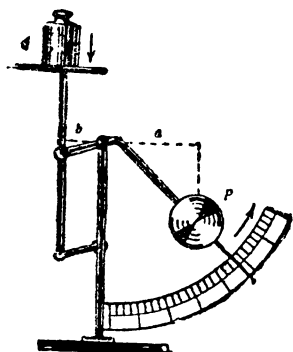
Черт. 25. К зад. № 196.
Столовые весы (Роберваля).

одновременно по AB и по AC , — то оно перемещается по диагонали параллелограмма, построенного на перемещениях AB и AC , и величина перемещения равна длине этой диагонали AD .

Зная это, определите, в каком направлении и насколько переместится тело, участвующее одновременно в двух движениях,

из которых одно перенесло бы его на 10 метров, а другое тоже на 10 м, но под углом в 120° к первому?

201. Стоя у окна в вагоне движущегося поезда, вы наблюдаете за линиями, которые чертят на стекле дождевые капли.

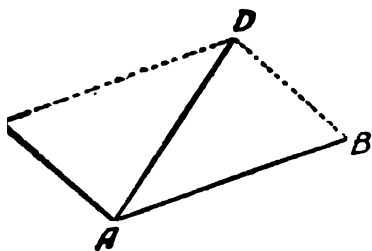


Черт. 26. К зад. № 197.
Весы для писем.

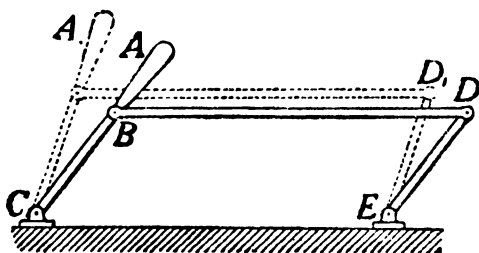
Капля, упавшая у правого края окна (переднего по направлению движения) в 22 см от нижнего угла, прошла косо по стеклу и встретила нижний край стекла в 16 см от этого угла. Скорость поезда вам известна — 8 м в секунду. Предполагая, что в воздухе дождь падал отвесно, определите скорость падения дождевых капель.

202. Могут ли различные ромбы иметь одинаковые периметры? А различные квадраты?

203. Необходимо устроить соединение трех прямых стержней на шарнирах так, чтобы при вращении стержня AC (черт. 28) вокруг неподвижной точки C стержень DE , соединенный с ним помощью BD , вращаясь около неподвижной точки E , занимал



Черт. 27. К зад. № 200.
Параллелограмм движений.



Черт. 28. К зад. № 203.

всегда положение, параллельное AC (например, чтобы D_1E было параллельно A_1C). Как это сделать?

204. На чем основано устройство чертежных инструментов, называемых «параллельными линейками» (см. черт. 29)?

205. На чем основано устройство параллельных тисков, изображенных на черт. 30.

206. Может ли диагональ параллелограмма равняться его стороне?

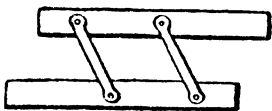
207. Может ли сторона ромба равняться половине диагонали?

208. Определить углы ромба, сторона которого равна его диагонали.

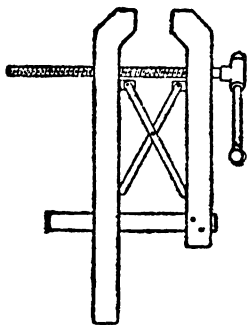
209. Сторона ромба вдвое больше высоты. Определить углы ромба (см. задачу № 167).

210. Существует ли внутри прямоугольника точка, одинаково удаленная от всех его сторон? От всех его вершин?

211. Переpletчик, желая проверить, правильно ли вырезан из папки квадрат, убеждается в том, что все его стороны равны. Достаточно ли такая проверка? Что еще надо измерить, если не измерять углов?



Черт. 29. К зад. № 204.
Параллельные линейки.



Черт. 30. к зад. № 205.
Параллельные тиски.

212. Желая проверить, все ли углы вырезанного из папки четырехугольника прямые, переpletчик убеждается в равенстве его диагоналей. Достаточно ли такая проверка? Что еще следовало бы измерить в четырехугольнике, если не измерять ни сторон, ни углов?

213. Желая проверить, имеет ли салфетка в точности форму квадрата, белшвейка убеждается, что, при перегибании по диагонали, края обеих половин салфетки совпадают. Достаточно ли такая проверка? Достаточно ли была бы она, если бы края совпадали при перегибании по обоим диагоналям?

214. Обычно принимают, что громоотвод предохраняет площадь круга, описанного около него радиусом, равным удвоенной его высоте. Исходя из этого правила ¹⁾, укажите, в какой точке

¹⁾ Верного, впрочем, лишь приблизительно.

на кровле здания, имеющего в плане прямоугольную форму, всего выгоднее установить громоотвод, чтобы высота его была наименьшая. — Если длина здания 32 метра, а ширина 10 метров, то достаточен ли для него громоотвод в 8 метров высоты?

215. В какой точке всего выгоднее установить громоотвод, если предохраняемый им участок имеет форму треугольника?

216. Из точки окружности опущены перпендикуляры на два взаимно-перпендикулярные диаметра. Определить расстояние между основаниями перпендикуляров, если радиус круга $= 5$ см.

217. Диагональ ромба образует со стороной угол в $12^{\circ}30'$. Определить углы ромба.

218. Точка пересечения диагоналей квадрата удалена от стороны на 10 см. Определить периметр квадрата.

219. Равны ли между собою высоты ромба, опущенные на смежные стороны?

220. Лесная поляна имеет форму ромба. В какой точке на ней должен поместиться наблюдатель, чтобы одновременно услышать эхо своего возгласа от всех стен леса?

221. Прямоугольный участок земли зарос по границам кустарником так, что свободны только одна сторона и неприлежащий к ней угол. Как найти внутри этого участка точку, одинаково удаленную от всех его вершин?

222. Поле в форме ромба распаивается фигурной пахотой (см. задачу № 125). В какой точке окончится пахота?

223. На половине длины стропильных ног, концы которых раздвинуты на 5 метров, устроена перекладина («ригель»). Определить ее длину.

224. Чтобы видеть себя в отвесном положении во весь рост в зеркале, вовсе не необходимо, чтобы оно было высотой в рост человека: для этого достаточно зеркало в половину человеческого роста. Докажите это.

225. На черт. 31 показано, как столяры пользуются аршином, чтобы разделить ширину доски на равные части. На чем основан этот способ?

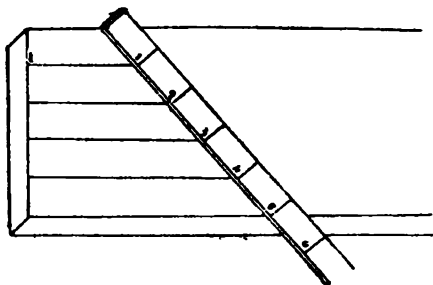
226. Какую фигуру образуют прямые, соединяющие середины последовательных сторон параллелограмма?

227. Какую фигуру образуют прямые, соединяющие середины последовательных сторон прямоугольника? Ромба?

228. Середины последовательных сторон прямоугольника, диагональ которого равна 10 см, соединены прямыми. Определить периметр образовавшегося четырехугольника.

229. Середины последовательных сторон квадрата соединены прямыми; середины сторон образовавшегося четырехугольника также соединены прямыми (черт. 32). Во сколько раз периметр последнего четырехугольника меньше периметра наружного квадрата?

230. Объясните, почему перпендикуляры, составленные в середине обоих катетов, пересекаются в точке, лежащей на гипотенузе.



Черт. 31. К зад. № 225.

Деление ширины доски на равные части
помощью аршина.

231. На черт. 33 показано, как разрезают квадратную дощечку для старинной игры, называемой «китайской головоломкой» ¹⁾: самая длинная прямая соединяет противоположные углы квадрата, другая — середины его сторон; середина этого последнего отрезка соединена с вершиною квадрата и с серединою полудиагонали; из конца этого отрезка опущен на диагональ перпендикуляр.

Игра заключается в том, что из частей разрезанной дощечки, прикладывая их друг к другу, составляют фигуры разнообразной формы (попробуйте составить прямоугольник, параллелограмм, прямоугольный треугольник, употребляя для каждой фигуры все 7 частей).

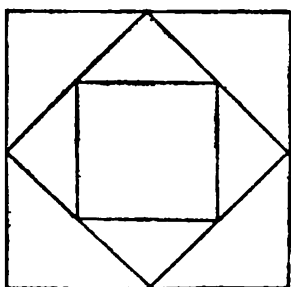
Можно ли из частей «китайской головоломки» составить неравносторонний треугольник? Равносторонний треугольник? Правильный шестиугольник? (*Указание:* обратите внимание на углы частей «китайской головоломки».)

¹⁾ Игра эта, действительно, происходит из Китая.

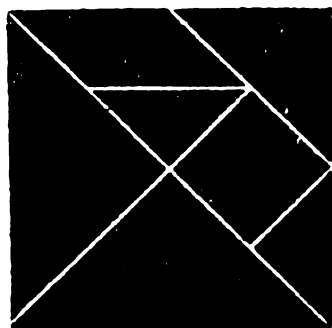
Из пяти меньших фигур (т.-е. из квадрата, параллелограмма, среднего треугольника и двух меньших треугольников) составить шестиугольник и указать величину его углов.

232. Кривые на чертеже 34 изображают изменение в течение года средней суточной температуры в столицах Европы (по данным за много лет). Рассмотрите их и определите, как велика (приблизительно) разница между температурой в Ленинграде и Париже 15 января? 30 апреля? 31 июля? 31 октября?

В каких городах и когда средняя температура дня равна 0° ?



Черт. 32. К зад. № 229.
Сравнить периметры квадратов.



Черт. 33. К зад. № 231.
«Китайская головоломка»

Какие дни в году самые холодные и самые жаркие в Ленинграде?

Каковы в столицах Европы средние температуры 1 мая?

Какова (приблизительно) разница между самой высшей и самой низшей средней температурой суток в Ленинграде?

В какое время года различие в температурах столиц Европы наибольшее? Наименьшее?

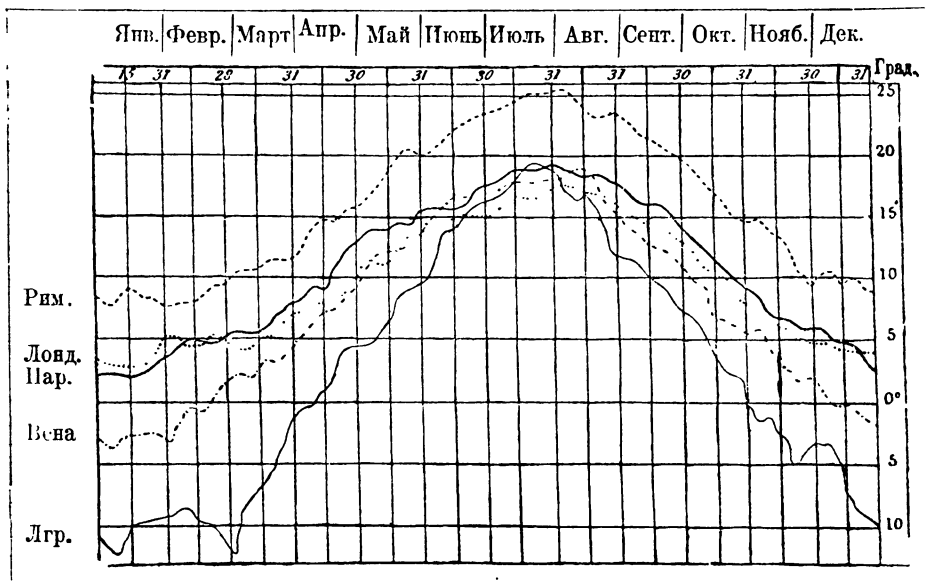
Какие еще сведения можете вы почерпнуть из рассмотрения этого графика?

233. Тело двигалось по прямому направлению 10 секунд, проходя по 5 метров в секунду. Начертите «график расстояний» его от начальной точки, изображая секунды времени отрезком в 1 см, а метр пройденного пути — отрезком в 2 миллиметра.

Одновременно из той же точки по тому же пути и направлению начало двигаться другое тело со скоростью 10 метров в секунду и двигалось 7 секунд. Изобразите на том же чертеже график расстояний для этого тела.

Можете ли вы по этому графику определить взаимное расстояние обоих тел через три секунды после начала движения?

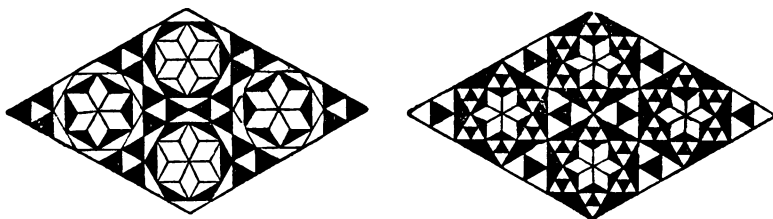
Как начертили бы вы график расстояний для второго тела,



Черт. 34. К зад. № 232.

График изменения средней суточной температуры в столицах Европы в течение года.

если бы оно начало двигаться через две секунды после первого? О чем говорит нам в этом случае точка пересечения обеих линий?



Черт. 35 и 36. К зад. № 235.
Византийские орнаменты.

234. Начертите график расстояний для падения тяжелого тела (см. зад. № 11). На том же чертеже изобразите график расстояний для другого тяжелого тела, выроненного 2-мя секундами позже. Пересекаются ли на вашем чертеже обе линии? Могут ли они пересечься в дальнейшем?

235. Черт. 35 и 36 изображают византийские орнаменты. Разберитесь в их построении и начертите их в увеличенном виде.

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя).

В классе и дома. Деление данных отрезков на равные части. Изготовление попруса и измерения помощью его. — Черчение фасадов кирпичной кладки разных систем (предварительно наблюдать в натуре). — Черчение графиков движений, температуры воздуха, количества осадков, хода роста огородных растений и т. п. — Разбор и черчение графиков железнодорожного движения. — Черчение равных фигур по способу, указанному в задаче № 198.

Вне класса. Провешивание прямых с обходом препятствия (зад. № 199). — Определение, помощью самодельного нивелира, возвышения одной точки над другой. — Нивелирование профиля. — Измерение падения ручья, т. е. возвышения одной точки водного уровня над другой, взятой ниже по течению; величину возвышения делят на горизонтальное расстояние между выбранными точками.

IX. Прямые и углы в круге.

Разыскание центра.—Хорды.—Касательные.—Вписанные углы.—Углы между хордами, между секущими, между касательными, между хордой и касательной.—Вписанные и описанные фигуры.—Взаимное расположение окружностей.—Сопряжение прямых и дуг дугами.

236. Обведите карандашом по краю поставленного на бумагу круглого предмета — стакана, блюда и т. п. — и разыщите центр начерченного таким образом круга.

237. Дана дуга. Как дополнить ее до окружности?

238. Как помощью эскера и мерной веревки разыскать центр дуги закругления дороги?

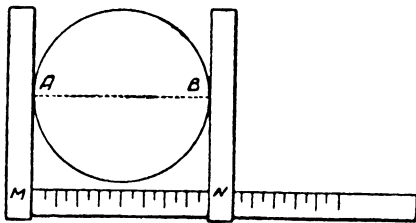
239. Как разделить дугу пополам, не разыскивая ее центра?

240. Чему равно расстояние между двумя равными и параллельными хордами, одна из которых лежит в 10 см от центра?

241. Из точки окружности проведены под прямым углом друг к другу две хорды в 15 см и 20 см. Определить их расстояния от центра.

242. Расстояние между точками опоры о землю переднего и заднего колеса телеги всегда равно расстоянию между осями колес. Почему?

243. Какую линию описывает центр круга, катящегося по прямой линии?



Черт. 37. К зад. № 244.

Мерная вилка (для измерения диаметра древесных стволов).

244. На черт. 37 изображена «мерная вилка», употребляемая для измерения диаметра древесных стволов. На чем основано ее устройство?

245. Как помощью эскера измерить ширину круглой башни (ср. пред. задачу).

246. Перпендикуляры, опущенные из концов диаметра на касательную, равны 8 см и 12 см. Определить величину диаметра. (*Указание:* соедините центр с точкой касания.)

247. В круг вписан четырехугольник, вершины которого делят окружность на части, относящиеся как 1:2:3:4. Определить углы четырехугольника.

248. Определить величину вписанного угла, опирающегося на дугу в 100° ? В 1° ? Сколько градусов заключает дуга окружности между сторонами вписанного угла в 10° ?

249. В круг вписан равнобедренный треугольник. Угол между радиусами, проведенными к концам основания $= 50^\circ$. Определить углы треугольника.

250. Хорда делит окружность на две дуги, одна из которых вчетверо больше другой. Определить вписанные углы, опирающиеся на эту хорду.

251. Вписанный угол на 25° меньше центрального, опирающегося на ту же дугу. Чему равен вписанный угол?

252. Угол, вписанный в дугу круга, равен центральному, опирающемуся на ту же дугу. Определить эти углы.

253. Как наметить точки окружности без циркуля, пользуясь лишь чертежным треугольником?

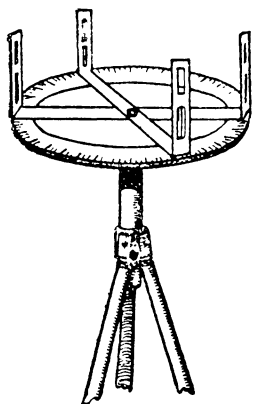
254. Как расставить вехи по окружности помощью одного только эскера?

255. Велосипедист едет по узкой круговой дорожке. За ним наблюдает издали человек, стоящий на той же дорожке. В каких местах длина велосипеда будет видна наблюдателю под наибольшим углом зрения? (Угол зрения — угол, который составляют между собою прямые линии, проведенные от краев предмета к глазу наблюдателя).

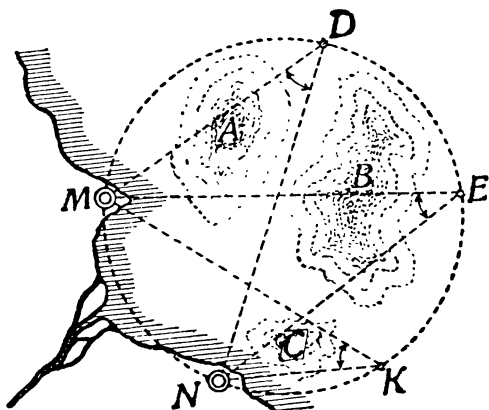
256. Две хорды, AB и CD (сделайте чертеж), пересекаются под углом в 40° . Найти величину дуг AC и DB , если известно, что первая втрое больше второй.

257. Рассмотрите изображенную на черт. 38 *астролябию*. прибор для измерения углов на местности. Если точка, вокруг которой вращается подвижная линейка (*алидада*), не совпадает с центром градусного круга (*лимба*), то как нужно по отсчетам делений круга определять угол между линейками?

258. Три угла расположены относительно окружности так, что стороны их проходят через одну и ту же пару точек окружности, но вершины лежат: одного угла — внутри круга, другого —



Черт. 38. К зад. № 257.
Астролябия.



Черт. 39. К зад. № 259.

на окружности, третьего — вне круга. Докажите, что второй угол меньше первого и больше третьего.

259. Если на пути к гавани (черт. 39) имеются мели *A, B, C*, то необходимо отметить для кораблей границы того круга, внутрь которого судам опасно проникать. Достигается это постановкой двух маяков в точках *M* и *N*, через которые проходит окружность, охватывающая опасный участок моря. Величина угла *MDN* известна лоцману, ведущему корабль. Каким образом может лоцман, измеряя угол между направлениями на оба маяка, определять, находится ли корабль вне опасной области, или уже проник внутрь охватывающего ее круга?

260. Определить угол между двумя касательными, если дуга между точками касания $= 60^\circ$.

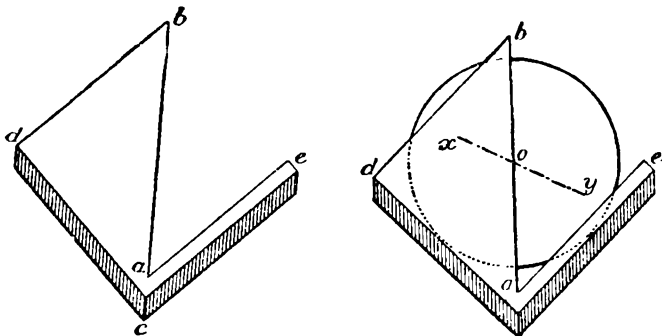
261. Угол между хордой и касательной, проведенной через ее конец, равен 50° . Определить дуги, стягиваемые хордой.

262. Угол между касательными $= 40^\circ$. Определить дуги между точками касания.

263. Хорда делит окружность на части, из которых одна в 4 раза больше другой. Найти угол между касательными, проведенными через концы хорды.

264. На диаметре круга построен равносторонний треугольник. Определить дуги, на которые окружность пересекается сторонами угла.

265. На черт. 40 изображен прибор, называемый «центроискателем» и служащий для нахождения центра точеных изделий.



Черт. 40 и 41. К зад. № 265.
Центроискатель и его употребление.

Способ его употребления показан на черт. 41: центроискатель прикладывают к круглой части изделия в двух положениях, прочерчивая прямую по направлению диагонали ab квадрата. Центр находится на пересечении этих прямых ab и xy .

На чем основано применение этого прибора?

266. Может ли центр круга, описанного около треугольника, лежать вне этого треугольника? Начертите такой треугольник.

267. Может ли центр круга, описанного около треугольника, лежать на одной из сторон этого треугольника?

268. Объясните, почему прямая, соединяющая середину гипотенузы с вершиной прямого угла, равна половине гипотенузы и есть радиус окружности, описанной около треугольника.

269. Радиус круга 30 см. Чему равна гипотенуза вписанного в него прямоугольного треугольника?

270. Можно ли вписать круг в ромб? Где находится центр такого круга?

271. В какие параллелограммы можно вписать круг? Около каких параллелограммов можно описать окружность?

272. Самая длинная хорда круга $= 6$ см. Найти периметры описанного квадрата и правильного вписанного шестиугольника.

273. Определить диаметр круглого обрубка, из которого была вытесана шестиугольная шашка торцовой мостовой со стороны 7 см. (Шашки вытесываются наибольшего размера).

274. Шестиугольные деревянные колодцы устраиваются обычно так, чтобы диаметр круга, описанного около внутреннего отверстия колодца, равнялся 1,4 м. Какой длины обрубки нужно приготовить для сооружения такого колодца, если на их соединения оставляется с каждой стороны 14 см?

275. Диаметр круга больше стороны вписанного шестиугольника на 6 см. Определить радиус.

276. Стакан вплотную обставлен соприкасающимися стаканами одинаковой с ним величины. Сколько их?

277. Чему равна апофема вписанного равностороннего треугольника (см. зад. № 167).

278. Как вписать в круг правильный восьмиугольник? 12-угольник?

279. Начертите рисунок паркета, составленного из квадратов и правильных восьмиугольников (см. зад. № 180).

280. Радиусы двух окружностей—10 см и 20 см. Каково их взаимное расположение, если линия центров $= 30$ см? 25 см? 35 см? 10 см? 7 см? 0?

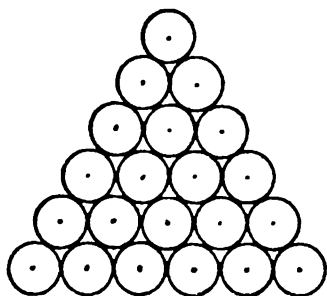
281. Радиусы окружностей — 3 метра и 7 метров; линия центров — 8 метров. Определить отрезок линии центров, отсекаемый дугами.

282. Диаметры колес двухколесного велосипеда — 80 см. Может ли расстояние между точками опоры колес о землю (так называемая «база» велосипеда, см. черт. 60) равняться одному аршину?

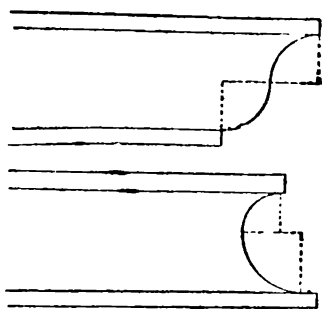
283. Линия центров двух соприкасающихся окружностей $\equiv 80$ см. Определить их радиусы, если один втрое больше другого. Сколько решений имеет задача?

284. Радиусы концентрических окружностей—7 м и 9 м. Как велико наибольшее и наименьшее расстояние между точками обеих окружностей?

285. Земля и Марс обращаются вокруг Солнца по круговым (почти) путям на расстоянии 150 и 228 миллионов километров. Во сколько раз при наибольшем приближении к Земле Марс ближе к нам, чем при наибольшем его удалении от нас?



Черт. 42. К зад. № 288.



Черт. 43 и 44. К задачам № 295 и 296.
Обращенный гусек и желобок.

286. Начертите круг, касающийся двух концентрических кругов.

287. Какую линию описывает центр круга, катящегося по окружности другого круга?

288. Как начертить фигуру, изображенную на черт. 42?

289. Прямая и дуга (или две дуги) называются *сопрягающимися*, если они касаются в точках соединения. Где находится центр дуги, сопряженной с прямой линией?

290. Как расположены относительно точки соединения центры двух сопрягающихся дуг?

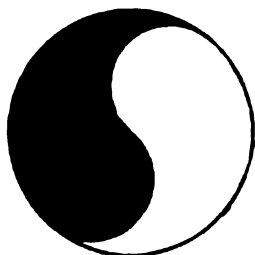
291. Начертить дугу, сопрягающуюся с данной прямой в данной точке.

292. Начертить дугу, сопрягающуюся с данной прямой в данной точке и проходящую через другую данную точку вне этой прямой.

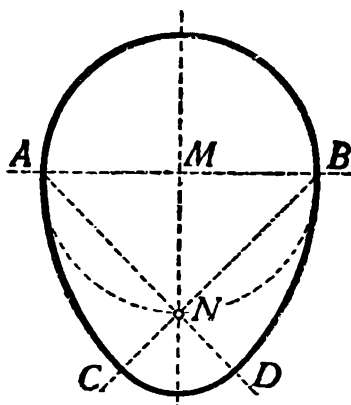
293. Начертить выпуклую фигуру из двух параллельных прямых, сопряженных полуокружностью (такая фигура называется в архитектуре «валиком», если она горизонтальна, и «аркадой», если вертикальна).

294. Соединить две непараллельные прямые сопрягающей их дугой. Рассмотреть 3 случая: 1) когда точки соединения и радиус дуги не даны; 2) когда дан только радиус дуги; 3) когда дана одна точка соединения, а радиус не дан.

Примечание. Примеры такого соединения прямых дугами представляют «закругления» или «кривые» железнодорожного пути, устраиваемые для плавного, без толчков, перехода поезда с одного прямолинейного направления на другое; радиусы закруглений на



Черт. 45. К зад. № 297.



Черт. 46. К зад. № 300.
Ионика.

главном пути допускаются от 150 саж. до 1000 саж. Кривой сопрягаются также переходы от одного уклона к другому или к горизонтальному направлению (дуга описывается здесь в вертикальной плоскости). Другой пример представляют бесконечные ремни, огибающие окружности шкивов, а также веревки блоков.

295. На черт. 43 (верхний чертеж) изображен боковой вид архитектурного украшения («облома»), называемого «обращенным гуськом». Как начертить эту кривую? (*Указание:* обратите внимание на пунктирные линии чертежа.)

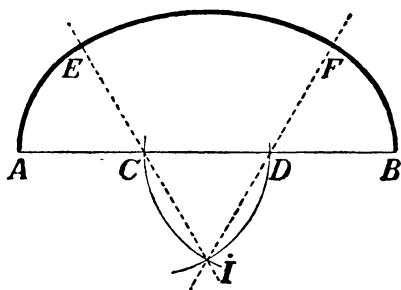
296. На черт. 44 (нижний чертеж) изображено архитектурное украшение («облом»), называемое «желобком». Как его начертить? (*Указание:* обратите внимание на пунктирные линии чертежа.)

297. На черт. 45 границы зачерненной и светлой частей круга образованы двумя полуокружностями, описанными на радиусах. Докажите, что все дуги этой фигуры в точках соединения сопрягаются.

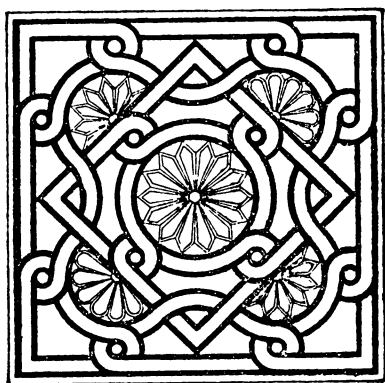
298. Соединить данную прямую и данную дугу сопрягающей дугой данного радиуса; точки соединения не даны.

299. Соединить две данные дуги сопрягающей дугой данного радиуса; точки соединения не даны.

300. Кривая $ACDB$ на черт. 46 составлена из дуг окружностей различного радиуса. Укажите центры и радиусы этих дуг и докажите, что они сопрягаются. (*Указание:* обратите внимание на пунктирные линии чертежа.)



Черт. 47. К зад. № 301.
Кривая о трех центрах.



Черт. 48. К зад. № 302.
Византийский орнамент.

Примечание. Эта замкнутая кривая (напоминающая внешние очертания куриного яйца, а также человеческого лица) часто употребляется в архитектурных украшениях; она называется «ионикой», или «кривой о 4-х центрах».

301. Линия, называемая в архитектуре «кривой о трех центрах» (или «полуовальной кривой»), чертится следующим образом (см. черт. 47). Делят отрезок AB на три равные части точками C и D и из этих точек радиусом, равным CD , засекают дуги, пересекающиеся в I . Проводят прямые IC и ID . Из точек C и D , как центров, описывают дуги AE и BF , а из точки I — дугу EF .

Объясните, почему дуги AE , EF и FB сопрягаются. Сопрягались ли бы они и в том случае, если бы AC было равно DB , но не равно CD ?

302. Черт. 48 изображает византийский орнамент. Большая часть его дуг сопрягаются между собою и с прямыми линиями. Разберитесь в его построении и начертите его в увеличенном виде.

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя.)

В классе и дома. Изготовление картонного центроискателя (зад. № 265) и разыскание помощью его центра круглых изделий.—Черчение орнаментов из правильных многоугольников, а также узоров, заключающих сопрягающиеся дуги.

Вне класса. Расстановка вех по дуге окружности помощью эскера (ср. зад. № 254).

Во время экскурсий. Разыскание центра закругления дороги; наблюдать сопряжение прямолинейных и кривых частей дороги и рельсовой колеи в местах ответвлений.

Х. Длина окружности.

Длина окружности и дуги.

303. Начертите несколько окружностей различного радиуса и рядом с каждой — прямую, приближенно равную ее длине.

304. Какой длины железную полосу нужно взять для шины колеса диаметром 1 метр, если на сварку концов необходимо оставить 7 сантиметров?

305. Вычислите длину экватора Солнца, если известно, что диаметр его равен 1400000 километрам.

306. Вычислите, сколько пробегает земной шар каждую секунду при своем обращении вокруг Солнца, принимая путь Земли за окружность с радиусом 149500000 километров.

307. Как можно вычислить радиус земного шара, исходя из того, что метр составляет одну 40-миллионную долю длины меридиана?

308. При игре в «кошку и мышку» все играющие берутся за руки и образуют круг. Каков приблизительно диаметр такого круга, если он составлен 27 участниками, у которых расстояние между ладонями распростертых рук 140 см?

309. Шар диаметром в 6 см откатился по прямому направлению на 6 м. Сколько полных оборотов он при этом сделал?

310. Диаметр рублевой монеты 33,5 мм, полтинника — 26,7 мм, 20-коп. монеты — 21,8 мм, гривенника 17,3 мм. Вычислите и начертите длину окружности этих монет.

311. Каков, приблизительно, поперечник дерева «в два обхвата»? Расстояние между концами вытянутых рук примите равным среднему росту взрослого человека, т.-е. 170 см.

312. В «Арифметике» Магницкого — самом полном русском учебнике математики первой половины XVIII века — находим, в числе прочих, следующую задачу:

«Окрест некоего града бяше водный ров, пмуший внешнее окружение 440 аршин, широта же его 14 аршин, и ведательно есть, колико аршин иматъ по внутреннему окружению».

Решите эту задачу.

313. Чтобы поднять ведро от уровня воды в колодце до краев сруба, вал ¹⁾ сделал 12 оборотов. Диаметр вала 50 см. Как велико расстояние от верхнего края сруба до уровня воды в колодце?

314. Диаметр вала шпиля (кабестана) 40 см. Сколько оборотов он должен сделать, чтобы приблизить к себе груз на 10 метров? Какой путь опишет при этом конец каждого водила, если длина водила 4 метра?

315. Какой путь описывает конец минутной стрелки стенных часов в течение недели? Длина стрелки — 12 см.

316. Диаметр ведущего колеса паровоза 1,5 метра. Сколько оборотов в минуту делает оно при скорости поезда 30 км в час?

317. Для успешного молотья верхний жернов должен делать 70 оборотов в минуту. Поперечник его — 130 см. С какою скоростью движутся во время работы краевые точки жернова (т.-е. какова скорость жернова)?

318. Круглая пила для дерева имеет в диаметре 0,6 метра и делает 500 оборотов в минуту. Какова ее окружная скорость? (См. пред. зад.)

319. Величайшее в мире водяное колесо (в Шотландии на о-ве Мен) имеет в диаметре 22 метра и делает один оборот в минуту. Какова его окружная скорость?

320. Шкив при 300 оборотах в минуту имеет окружную скорость 2 метра в секунду. Найти диаметр шкива.

321. Круглая пила диаметром 75 см должна иметь окружную скорость 30 метров в секунду. Сколько оборотов в минуту нужно ей дать?

¹⁾ *Валом* называется ось (круглый стержень, поддерживающий колесо), если она служит также и для передачи вращательного движения.

322. Круговая скорость точильного камня не должна превышать 44 футов в минуту. Какое наибольшее число оборотов в минуту может делать точильный камень диаметром 3 фута?

323. Диаметры переднего и заднего колес великорусской телеги — 80 см и 90 см. На сколько полных оборотов переднее колесо делает больше заднего, пока телега проезжает 1 километр?

324. Почему передняя ось телеги больше стирается и чаще загорается, нежели задняя? (См. пред. зад.)

325. При одном полном обороте педалей велосипеда каждое его колесо делает $3\frac{1}{2}$ оборота. Диаметры колес — 80 см. Какой путь проходит велосипед за один полный оборот педалей? (Этот путь называется «разверткой» велосипеда.)

326. Стакан у верхнего края шире, чем у донышка, на полсантиметра. Какова разница в длине окружностей верхнего края и донышка?

327. На сколько удлинился бы экватор глобуса, если бы его радиус был на 1 см больше? Насколько удлинился бы, при таком же увеличении радиуса, земной экватор? А экватор звезды Сириус?

328. Если бы мы могли обойти земной шар по экватору, то макушка нашей головы описала бы более длинный путь, чем каждая точка ступней. Как велика эта разница? Как велика была бы она на других планетах? Рост человека примите равным 175 см.

329. Железная пина, диаметр которой при нуле градусов равен 1 метру, нагрета до 100° . На сколько она при этом удлинилась, если от нагревания на каждый градус железный стержень увеличивается на 0,00001 той длины, какую он имеет при 0° ?

330. На черт. 45 и черт. 49 границы черных и белых участков составлены из полуокружностей. Определите для каждого чертежа длину обвода черных участков. Диаметр охватывающей окружности — 1 метр.

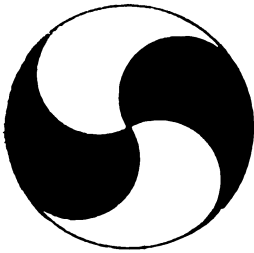
331. На черт. 50 изображен прибор для обнаружения удлинения трубки *ВВ* при ее нагревании. Трубка, лежащая горизонтально, нагревается протекающим внутри нее паром. Она лежит

на двух подставках; в B она закреплена неподвижно, а под противоположный, свободный конец подложена вязальная спица aa' , толщиной 1 мм, со стрелкой A . Стержень при удлинении заставляет спицу перекашиваться и двигать конец стрелки A по дуге C .

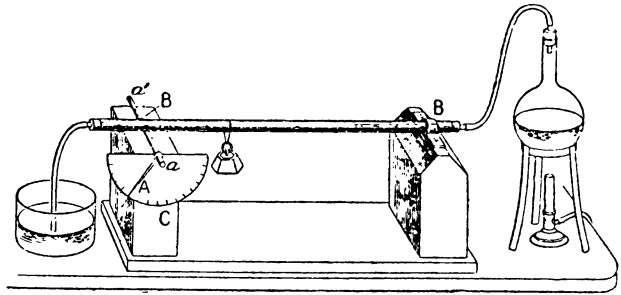
Стрелка повернулась на 86° . На сколько удлинилась трубка?

332. Какого диаметра должен быть глобус, чтобы 1' его экватора равнялась 1 миллиметру?

333. Ленинград и Константинополь лежат почти на одном меридиане: Ленинград под $59^\circ 56'$ сев. шир., Константинополь —



Черт. 49.
К зад. № 330.



Черт. 50. К зад. № 331.
Прибор для обнаружения удлинения от теплоты.

под $41^\circ 2'$ сев. шир. Определите кратчайшее расстояние между этими городами по земной поверхности, принимая радиус земного шара = 6400 километрам.

334. Ленинград лежит в 25° к востоку от Гринвичского меридиана, Христиания — на том же параллельном круге на 11° восточнее Гринвичского меридиана. Радиус параллельного круга, на котором расположены эти города, вдвое меньше радиуса экватора. Определить взаимное расстояние этих городов по дуге параллельного круга и разницу в их местном времени. Радиус земного шара = 6400 километрам.

335. Какой угол составляют между собою два отвеса на расстоянии 1 километра по меридиану? Радиус земного шара = 6400 километрам.

336. Человек среднего роста на совершенно ровном месте видит кругом себя не далее $4\frac{1}{2}$ километров. Как велика, в градусной мере, та дуга земной поверхности, которую он видит?

337. Вычислите приблизительно, на сколько расходятся стороны угла в 1° в расстоянии 20 метров от вершины (расстояние между точками сторон угла можно принять равным длине соответствующей дуги).

338. Чему равен угол, стороны которого в расстоянии 20 метров от вершины расходятся на 0,1 миллиметра, т.-е. приблизительно на толщину волоса? (См. пред. зад.)

339. Когда полярный путешественник Нансен достиг $86^\circ 44'$ сев. широты, сколько километров оставалось ему пройти до полюса?

340. Почему точки земной поверхности, лежащие ближе к экватору, движутся, при вращении Земли вокруг оси, быстрее точек, более удаленных от экватора?

341. Точными астрономическими измерениями установлено, что точки полюсов не сохраняют неизменно одного и того же положения на земной поверхности, а перемещаются, отклоняясь от среднего положения не более, чем на полсекунды дуги. Как велико наибольшее отклонение в метрах?

342. Луна совершает один полный оборот вокруг оси в $29\frac{1}{2}$ земных суток (т.-е. сутки на Луне длятся почти месяц). Могли бы велосипедист на лунном экваторе всегда иметь над собою незаходящее солнце? (*Указания:* велосипедист должен для этого подвигаться на запад с такою же скоростью, с какою Луна, вращаясь, относит его к востоку. Обычная скорость самоката не свыше 20 км в час. Диаметр экватора Луны — 3500 км.)

343. На какую долю (в %%) сторона вписанного шестиугольника короче стягиваемой ею дуги?

344. Свободный конец жерди колодезного журавля отстоит от развилки на 7 м, противоположный — на 3 м. Опускаясь, свободный конец описывает дугу в 5 м. Сколько градусов заключает угол между крайними положениями жерди? Какой длины дугу описывает конец короткой части жерди?

345. Радиус железнодорожного закругления — 600 саж., длина дуги закругления — 50 саж. Сколько градусов в дуге закругления?

346. Как велика разница в длине наружной и внутренней колеи жел.-дор. закругления, дуга которого заключает 36° ? Расстояние между рельсами 1 м 52 см. Зависит ли разность длин колеи от радиуса закругления?

347. Угол между радиусами сектора 120° . Какой путь между концами дуги короче — по дуге или по радиусам?

348. Периметр сектора = 6942 см. Угол между его сторонами = 18° . Определить радиус.

349. Как велик центральный угол, дуга которого равна радиусу? (Этот угол называется «радианом»; величину его полезно запомнить.)

350. Маховое колесо делает 100 оборотов в минуту. На сколько радианов поворачивается оно в 1 сек. времени (т.-е. какова его «угловая скорость» в радианах)?



Черт. 51. К зад. 351.
Уровень с воздушным пузырьком.

351. Уровень с воздушным пузырьком представляет собою вделанную в оправу стеклянную трубку, изогнутую по дуге круга и наполненную жидкостью; в ней оставляется пузырек воздуха, который, при горизонтальном положении основания уровня, занимает высшую точку трубки, т.-е. ее середину (см. черт. 51). Если радиус дуги, по которой изогнута трубка, равен 10 метрам, то на сколько отодвинется от середины пузырек при наклонении прибора на $1/4^\circ$?

352. Почему принято считать лучи Солнца, падающие на Землю (или другую планету), параллельными между собою? Вычислите, какой наибольший угол могут составить между собою два луча, исходящие из одной точки Солнца и падающие на земную площадку, наибольшая ширина которой 1 километр.

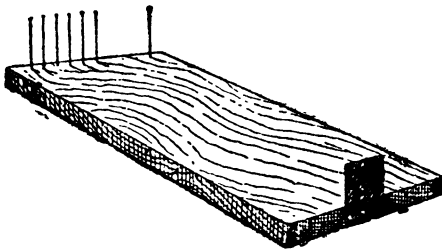
353. На черт. 52 изображен простой прибор для приближенного измерения небольших углов зрения (см. зад. № 255). Он состоит из деревянной дощечки, под прямым углом к которой на краю укреплен просверленная пластина. На противоположном краю дощечки втыкают ряд тонких булавок, которые размещают следующим образом. Чертят на стене две параллельные линии, отстоящие на 1 метр одна от другой, отходят от

стены по перпендикулярному направлению на 57 метров и, рассматривая начерченные линии в отверстие просверленной пластинки, втыкают булавки в ряд так, чтобы каждая соседняя пара покрывала проведенные на стене линии.— Всякий предмет, который, при рассматривании в просверленную пластинку, помещается как раз между двумя соседними булавками, виден под углом в 1° . Такой угломер называется «грабельным».

На чем основано устройство этого прибора?

В каких случаях можно пользоваться им, как дальномером (т.-е. для определения расстояний до отдаленного предмета)?

Можно ли при измерении им угла держать дощечку не горизонтально?



Черт. 52. К зад. № 353.

Грабельный угломерный прибор.

354. Если возвышение одной точки дороги над другой разделить на горизонтальное расстояние между ними, то полученная дробь будет выражать «подъем», «уклон» или «падение» соответствующего участка дороги. Часто (однако, не

всегда) ее выражают в ‰ или—для железнодорожных уклонов—в тысячных долях. Подъем дороги в 3‰ означает, что на расстоянии 100 метров дорога поднимается на 3 метра, или на расстоянии 100 сажень—на 3 саж. и т. п.¹⁾

Определить, какому приблизительно углу наклона направления дороги с горизонтальной линией соответствует подъем в 3°? Уклон 1 : 40? Падение реки 0,001? Какому подъему приблизительно соответствует угол наклона в 4°? В 7°?

¹⁾ Величина подъема обозначается на жел. дорогах на особых «указательных» столбиках, расставленных у полотна: верхняя цифра надписи означает подъем или уклон (в зависимости от положения доски с надписью), нижняя—на протяжении скольких сажень такой уклон сохраняется. Например, надпись $\frac{0,002}{200}$ означает, что на протяжении 200 саж. дорога идет с уклоном 0,002.

355. Мы не замечаем наклона почвы, если высота подъема наклонной линии не превышает $\frac{1}{24}$ ее основания («заложения»), т.-е. если подъем не превосходит $\frac{1}{24}$. Скольким градусам приблизительно соответствует такой подъем?

356. Длина хорды дуги, содержащей 10° , составляет (как показывает точное вычисление) 0,174 радиуса. Определить, какую относительную ошибку мы делаем, принимая такую дугу равной стягивающей ее хорде? Сделайте то же вычисление для дуги в 30° : стягивающая ее хорда = 0,518 радиуса.

357. При удлинении радиуса некоторой окружности вдвое, ее длина возросла на 88 метров. Найти радиус.

358. Во сколько раз длина окружности, описанной около равностороннего треугольника, больше длины вписанной в него окружности? (См. зад. № 277.)

359. Окружность больше своего диаметра на 856 см. Найти радиус.

360. Определить величину относительной ошибки, какая происходит, когда при вычислении длины окружности принимают $\pi = 3$.

361. Можно ли для быстрого приближенного вычисления длины окружности пользоваться следующим приемом: диаметр умножить на 3 и к результату прибавить $\frac{1}{2}$ десятой доли этого произведения?

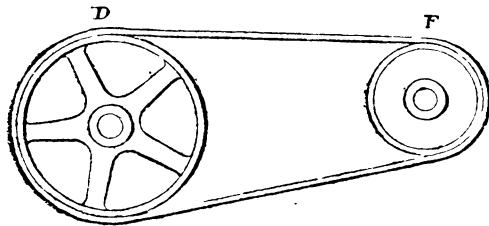
362. Падение тела в воду вызывает круговые волны. Имеют ли эти волны форму кругов также и в текучей воде? (Указание: ср. зад. № 198.)

Бесконечный ремень. Зубчатые колеса.

Когда нужно передать вращение одного *вала* (т.-е. металлической оси ¹⁾ другому, расположенному на некотором расстоянии от первого, на них насаживают по колесу (*шкиву*) и накидывают на оба шкива охватывающий их ремень с сшитыми концами, называемый бесконечным (черт. 53). Ремень натягивают настолько туго, чтобы при вращении одного шкива (*ведущего*) он увлекался им и увлекал во вращение другой, *ведомый* шкив.

¹⁾ См. примечание к зад. № 313.

Так как ремень не скользит по окружности шкивов (точнее, почти не скользит), то при одном полном обороте *ведущего* шкива каждая точка ремня перемещается на длину окружности этого шкива и заставляет каждую точку окружности *ведомого* шкива описывать путь такой же длины. Поэтому, если оба шкива одинаковых размеров, они делают одинаковое число оборотов в минуту. Если же окружности шкивов неодинаковы, то меньший шкив делает в минуту во столько раз больше оборотов, чем другой, во сколько раз длина его окружности меньше длины окружности другого шкива. Для вычисления отношения числа оборотов шкивов, соединенных ремнем, достаточно поэтому знать отношение их окружностей, — или их диаметров, так как длины окружностей относятся между собой, как их диаметры.



Черт. 53. Бесконечный ремень.

Пример. Ведущий шкив, диаметром 70 дюймов, делающий 120 оборотов в минуту, приводит во вращение ведомый шкив диаметром 30 дюймов. Сколько оборотов делает в минуту ведомый шкив? — *Решение.* Число оборотов ведомого шкива во столько раз больше 120, во сколько раз 70 больше 30; следовательно,

$$\text{оно} = \frac{120 \times 70}{30} = 280. \text{ Если бы требовалось довести число оборотов, например, до 300, то нужно было бы насадить на вал, вместо 30-дюймового ведомого шкива, другой — диаметром } \frac{70 \times 120}{300} = 28 \text{ дюймам.}$$

Прямолинейные части ремня, перекинутого через шкивы, имеют направление общих касательных к окружностям шкивов, — внешних касательных при так называемой «открытой передаче», и внутренних касательных при «закрытой передаче»; в последнем

случае, т.-е. при перекрещивающемся ремне, шкивы вращаются в противоположные стороны.

Для передачи вращения и изменения его скорости применяются также сцепляющиеся «зубчатые колеса» (см. черт. 55 и 56); зубцы на окружности этих колес нарезаны так, что несколько зубцов одного колеса, входя в промежутки между зубцами другого, надавливают на них при вращении; вследствие этого вращение одного колеса вызывает вращение другого (в противоположную сторону). Размеры зубцов (и промежутков между ними) одинаковы у обоих сцепляющихся колес. Поэтому, если диаметры колес равны, то, находясь в зацеплении, колеса при движении совершают одинаковое число оборотов в минуту. Если же сцепляющиеся колеса неодинаковых размеров, то числа их оборотов находятся в обратном отношении, нежели их окружности (или диаметры). А так как зубцы обоих колес одинаковой ширины, то отношение окружностей или диаметров равно отношению числа зубцов.

Зубчатыми колесами удобно поэтому пользоваться для изменения скорости движения,—например, чтобы преобразовать медленное движение крыльев мельницы в быстрое вращение жерновов; точно также, благодаря соответствующему подбору зубчатых колес в часовом механизме, одна и та же движущая сила (падающая гирия, раскручивающаяся пружина) заставляет ось часовой стрелки совершать полный оборот в 12 часов, минутной — в 1 час, а секундной — в 1 минуту.

Упражнения.

363. С какой скоростью движутся точки бесконечного ремня, который надет на ведущий шкив диаметром 80 см, делающий 100 оборотов в минуту?

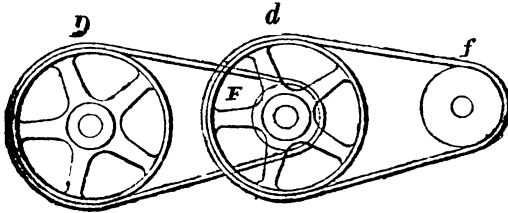
364. Два шкива, диаметром 30 дюймов каждый, насажены на валы, удаленные один от другого на 3 сажени. Шкивы соединены бесконечным ремнем и вращаются в одну сторону. Как велика длина ремня?

365. Ленточная пила для резки дерева перекинута, наподобие бесконечного ремня, через два шкива, диаметром $1\frac{1}{2}$ ар-

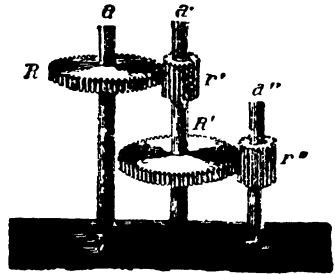
шина каждый. Сколько оборотов в минуту должны делать эти шкивы, чтобы пила перемещалась со скоростью 30 футов в секунду?

366. Вал делает 130 оборотов в минуту. Насаженный на него шкив имеет в диаметре 80 см и соединен ремнем с ведомым шкивом, диаметром 50 см. Определить число оборотов ведомого шкива?

367. Вал, делающий 200 оборотов в минуту, несет два шкива, диаметром 10 дюймов каждый. Один шкив соединен бесконечным ремнем со станком, оси которого нужно сообщить 150 оборотов в минуту; другой шкив соединен ремненной передачей со станком, ось которого должна делать 400 оборотов. Каких размеров шкивы нужны для этих станков?



Черт. 54. К зад. № 369.



Черт. 55. К зад. № 371.
Система зубчатых колес.

368. Ленточная пила двигалась на двух равных шкивах диаметром 1 метр, делавших 80 оборотов в минуту. Вследствие повреждения шкивов их заменили новыми, диаметры которых, однако, оказались на 4 сантиметра короче прежних. Сколько оборотов должны делать новые шкивы, чтобы поддерживать прежнюю скорость пилы? На сколько пришлось укоротить, при замене шкивов, ленту пилы (чтобы не менять расстояния между осями шкивов)?

369. На черт. 54 изображена система передачи движения от шкива D шкиву f посредством промежуточных шкивов d и F , составляющих одно целое. Диаметры шкивов таковы: D —85 см, F —40 см, d —90 см и f —48 см. Шкив D делает 150 оборотов в минуту. Вычислить число оборотов шкива f .

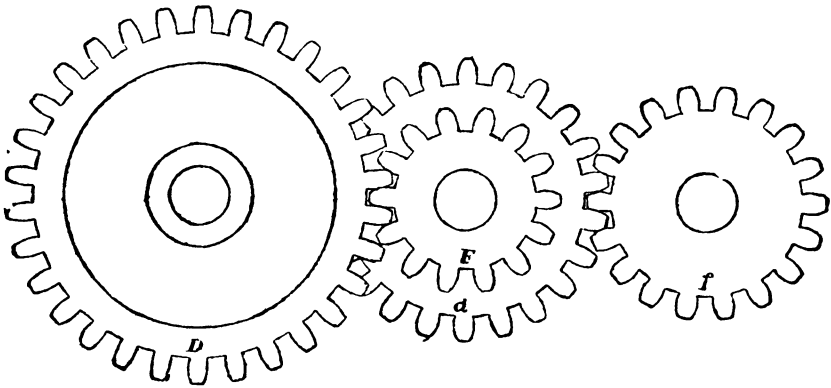
370. Сколько оборотов делает зубчатое колесо с 32 зубцами, если сцепляющееся с ним зубчатое колесо (*шестерня*) с 8 зубцами делает 12 оборотов в минуту?

Во сколько раз диаметр первого колеса больше диаметра шестерни?

371. На черт. 55 изображена система зубчатых колес и шестерен R , r' , R' и r'' , при чем шестерня r' и колесо R' наглухо насажены на общую ось $a'a'$. Числа зубцов колес и шестерен следующие:

$$R - 48; r' - 16;$$

$$R' - 54; r'' - 18.$$



Черт. 56. К зад. № 372.
Система зубчатых колес.

Сколько оборотов делает ось $a''a''$, если ось aa делает 20 оборотов в минуту?

372. На черт. 56 изображена передача движения от шкива D шкиву f посредством промежуточных зубчатых колес F и d . Числа зубцов:

$$D - 30; F - 14;$$

$$d - 22; f - 18.$$

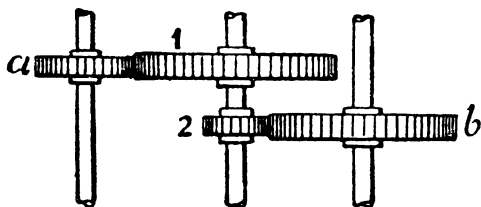
Шкив D делает 42 оборота в минуту. Сколько оборотов делает шкив f ?

373. На черт. 57 изображена система зубчатых колес (вид сбоку, с ребра), в которых колесо a имеет 14 зубцов,

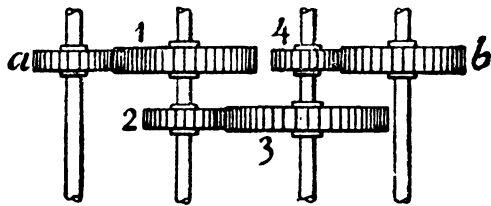
колесо 1 — 28 зубцов, колесо 2 — 9 зубцов и колесо b — 25 зубцов. Сколько оборотов делает в минуту колесо a , если b делает 45 оборотов в минуту?

374. В системе зубчатых колес, изображенной на чертеже 58 (вид сбоку, с ребра), колеса имеют следующие числа зубцов:

a — 11	5 — 22
1 — 18	4 — 9
2 — 11	b — 16



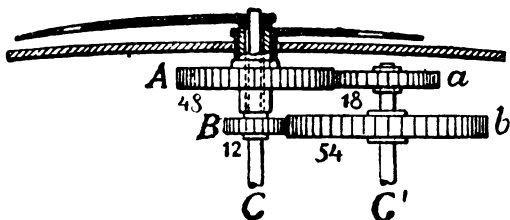
Черт. 57. К зад. № 373.



Черт. 58. К зад. № 374.

Колесо a делает 320 оборотов в минуту. Сколько оборотов делает в минуту колесо b ?

375. На черт. 59 изображено расположение осей и зубчатых колес часового механизма (вид сбоку, с ребра). Колеса a и b , насаженные на ось C_1 , сцепляются с колесами A и B , при чем ось C колеса B , проходящая *сквозь трубчатую ось* колеса A , несет минутную стрелку, а сама трубчатая ось — часовую стрелку.



Черт. 59. К зад. 375.

Расположение осей и зубчаток часового механизма. (Вид сбоку; цифрами обозначено число зубцов.)

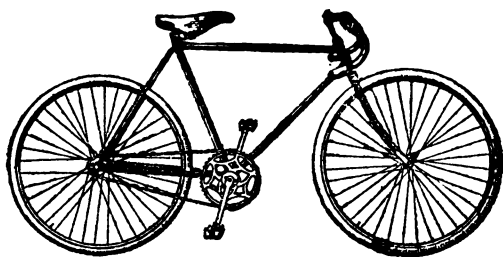
Числа зубцов колес обозначены на чертеже. Докажите, что оси C и C_1 параллельны и что часовая стрелка должна двигаться в 12 раз медленнее минутной.

376. Велосипед (черт. 60) приводится в движение следующим образом: ездок, двигая педали ногами, вращает среднюю (веду-

пую) шестерню, которая соединена цепью с зубчатым колесом, наглухо насаженным на втулку заднего колеса. Число зубцов у средней шестерни больше, нежели у задней; благодаря этому, при одном обороте педалей заднее колесо поворачивается более одного раза. Путь, проходимый задним колесом велосипеда (и, следовательно, всем велосипедом) при одном обороте педалей, называется «разверткой» велосипеда. — Вычислите развертку велосипеда, шестерни которого имеют 48 и 16 зубцов. а диаметр заднего колеса — 70 сантиметров.

377. «Передачей» велосипеда называется диаметр такого воображаемого колеса, окружность которого равна *развертке* этого велосипеда (см. пред. зад.). Вычислите «передачу» велосипеда, размеры частей которого указаны в предыдущей задаче.

378. Для быстрого вычисления «передачи» велосипеда (см. пред. зад.) употребляют следующий прием: число зубцов средней шестерни делят на число зубцов задней шестерни и частное умножают на диаметр заднего колеса. Согласуется ли это с приведенным в предыдущей задаче определением «передачи» велосипеда?



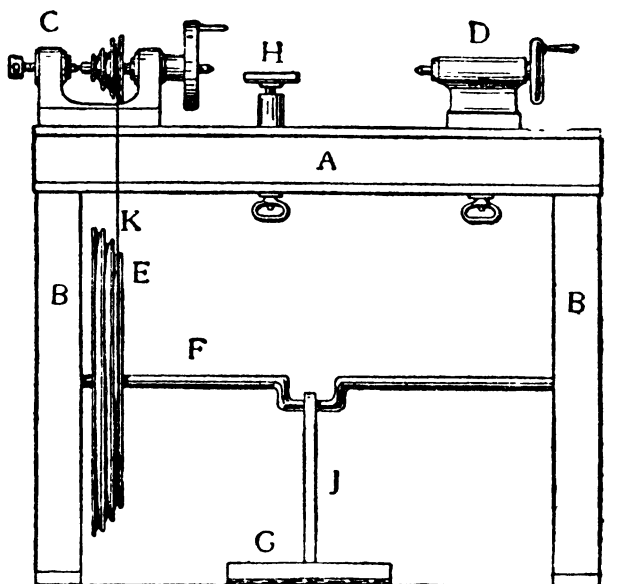
черт. 60. К зад. № 376.

Велосипед приводится в движение тем, что ездок, напирая ногами на педали, вращает среднюю (ведущую) шестерню, соединенную цепью, наподобие бесконечного ремня, с задней (ведомой) шестерней; последняя вращается как одно целое с задним колесом, движущим велосипед вперед.

Токарный станок.

Для придания деревянным или металлическим изделиям круглой формы срезанием излишков служит *токарный станок*. Обыкновенный токарный станок для деревянных изделий, приводимый в действие ногами, изображен на черт. 61. Обрабатываемый материал зажимается между осевыми выступами частей *С* и *Д* станка, называемых *бабками* и установленных на столе *А*.

Бабка *C* («коренная») — неподвижна; бабка *D* («подвижная») может быть перемещаемая вдоль стола и закрепляется на требуемом расстоянии от неподвижной бабки. Ось бабки *C*, называемая *шпинделем*, приводится в быстрое вращение шнуром ведущего колеса *E* («маховика»), которое приводится в движение силою ног помощью *подножки G*, *шатуна J* и *коленчатого вала F*.



Черт. 61. Токарный станок. *A* — стол; *BB* — стойки; *C* — коренная, или неподвижная бабка; *D* — подвижная бабка; *E* — маховик; *F* — коленчатый вал; *G* — подножка; *J* — шатун; *H* — подручник; *K* — бесконечный ремень.

Вследствие вращения шпинделя вращается и прижатый к нему обрабатываемый материал, с которого при этом срезают стружки *резцом*, упираемым против него на *подручник H*. (См. также черт. 3 к зад. № 31.)

Для точения по металлу употребляются станки подобного же устройства, но более массивные и приводимые во вращение не ногами, а механическими двигателями.

В зависимости от размеров и твердости обрабатываемого материала, допускается различная *предельная скорость резания*, т.-е. различная скорость движения точек окружности вращаемого изделия: для небольшого изделия из мягкого материала (дерево) эта скорость может быть больше; для крупных изделий и для твердого материала (сталь, чугун) — она должна быть меньше, чтобы не повредить резца. Возможность соответственно этому ускорять или замедлять вращение шпинделя, не изменяя скорости движения ведущего колеса, достигается в токарных станках посредством так называемых *ступенчатых* шкивов. Рабочий (ведомый) шкив неподвижной бабки имеет три *ступени* (см. черт. 61) различного диаметра; маховик (ведущий шкив) имеет также три ступени, диаметры которых уменьшаются в обратную сторону. Когда шнур перекинут через *наименьшую* ступень ведомого шкива и наибольшую ступень ведущего шкива (маховика), то шпиндель вращается с наибольшей скоростью, так как отношение диаметров вращающихся колес тогда наибольшее; при переводе шнура на другие ступени ведомого шкива и маховика скорость вращения шпинделя уменьшается, соответственно меньшему отношению диаметров. Диаметры ступеней подбираются так, что шнур во всех трех положениях остается натянутым (см. зад. № 380).

Упражнения.

379. Измерьте на черт. 61 диаметры ступеней ведомого шкива и маховика и вычислите (приблизительно) число оборотов шпинделя при трех положениях шнура, считая, что маховик делает 50 оборотов в минуту.

380. Каково приблизительно должно быть соотношение между диаметрами ступеней ведомого колеса и маховика, чтобы можно было переводить ремень с одной пары ступеней на другую, не изменяя его длины?

381. Нужно обточить латунный вал диаметром 5 дюймов. Вычислите допустимое число оборотов этого вала, если предельная скорость резания для латуни 120 футов в минуту.

382. Для чугуна предельная скорость резания — 60 футов в минуту. Какое наибольшее число оборотов допустимо при обработке чугунного изделия диаметром 2 дюйма?

383. Обыкновенный ножной токарный станок при быстром ходе дает 10 оборотов шпинделя в секунду. Можно ли при таком ходе станка точить латунные винтики из проволоки $\frac{1}{4}$ дюйма толщины? (См. зад. № 381.)

384. Самый медленный ход обыкновенного ножного токарного станка — 360 оборотов шпинделя в минуту. Можно ли на таком станке обтачивать чугунные изделия 1 дюйм в диаметре? (См. зад. № 382.)

385. Допустимое число оборотов *сверла* вычисляется так же, как и для обтачиваемых изделий равного диаметра. Вычислить, сколько оборотов может делать в чугуне сверло диаметром $\frac{1}{4}$ дюйма? (См. зад. № 382.)

Угловая величина (угол зрения).

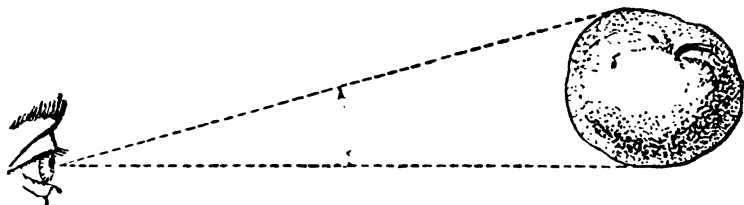
Углом зрения, под которым виден предмет, называется угол, составляемый двумя прямыми линиями, проведенными к глазу от крайних точек рассматриваемого предмета (черт. 62); его называют также *угловой величиной* предмета. Чем больше предмет и чем ближе он находится к нам, тем под большим углом зрения мы его видим и тем больше различаем в нем подробностей. Предмет незначительных размеров может быть виден под большим углом зрения, если расположен достаточно близко к глазу; и, наоборот, очень крупные предметы видимы под малыми углами зрения, когда находятся весьма далеко. Так, например, ноготь на пальце нашей руки мы видим под большим углом зрения, нежели огромное Солнце, удаленное от нас на 150 миллионов километров.

Опыт показывает, что наименьший угол, под которым *нормальный* человеческий глаз способен видеть отдельно две точки предмета, равен, в среднем, *одной минуте*: всякие две точки, промежуток между которыми усматривается под углом, меньшим $1'$, сливаются для среднего человеческого зрения в точку. Следовательно, $1'$ есть *предел различимости* для среднего нормального человеческого глаза ¹⁾. Поэтому подробности очень мелких или

¹⁾ Предел *различимости* не следует, однако, принимать за предел *видимости* предмета: мы видим, замечаем предметы, угловая величина кото-

очень отдаленных предметов, представляющиеся глазу под углом меньшим $1'$, уже не различаются средним глазом, а сливаются в одну точку. Чтобы различать в предмете отдельные подробности, необходимо каждую из них видеть под углом больше $1'$.

Для усиления природной остроты нашего зрения мы вооружаем глаз *оптическими инструментами*: зрительной трубой, телескопом — для предметов отдаленных; лупой, микроскопом — для предметов хотя и близких, но чересчур мелких. Действие тех и других инструментов состоит в том, что, изменяя направление лучей света, они показывают предметы глазу под



Черт. 62. Угол зрения.

Угол зрения. В данном случае яблоко видно под углом в $16''$. Легко вычислить, что если диаметр яблока = 10 сантиметрам, то оно удалено от глаза на 35 сантиметров.

большим углом зрения. Если, например, говорят, что зрительная труба «увеличивает в 100 раз», то это надо понимать в том смысле, что рассматриваемые в нее предметы представляются нам под углом в 100 раз большим, чем без трубы; следовательно, в эту трубу мы можем различать такие подробности отдаленных предметов, которые для невооруженного глаза неразличимы (так как усматриваются под углом зрения менее $1'$).

рых меньше $1'$ и даже $1''$ (например звезды), но не различаем *их очертаний*, не воспринимаем никаких подробностей на них. Для предметов удлиненных предел различения лежит ниже (для проволок — около $1''$). Люди с менее острым зрением, чем нормальное, перестают уже различать предметы тогда, когда их угловая величина даже превышает одну минуту.

Зная размеры предмета и его удаление от нашего глаза, легко вычислить угол зрения, под которым он виден: принимают ширину предмета за дугу круга, радиус которого равен расстоянию предмета от глаза; длина дуги приравняется в этом случае длине стягиваемой хорды,—что при небольших углах дает весьма незначительную погрешность ¹⁾. Например, чтобы узнать угловую величину человека среднего роста (5½ фут.) на расстоянии 100 саж., нужно вычислить длину окружности, радиус которой 100 саж., или 700 фут.; она = $2\pi \times 700 = \frac{44}{7} \times 700 = 4400$ фут.; принимая рост человека, 5½ фут., за дугу этой окружности, мы определим число градусов или долей градуса в такой дуге, уменьшив 360° в отношении 5½ к 4400. Получим $\frac{360 \times 11}{1 \times 4400} = \frac{9}{20}$ градуса, или 27'. Следовательно, человек среднего роста виден на расстоянии 100 саж. под углом 27' (около $\frac{1}{2}^\circ$). Тот же результат можно получить быстрее, если исходить из того, что всякий предмет, удаленный от глаза на 57 своих поперечников, виден под углом в 1° (см. зад. № 353): предмет, удаленный на $\frac{700}{5,5}$ своих поперечников, должен быть виден под углом во столько раз меньшим, во сколько раз 57 меньше $\frac{700}{5,5}$; следовательно, он виден под углом $\frac{57 \times 5,5}{700}$ градуса, или 0°,45, т.-е. 27'. — На расстоянии в 27 раз большем, т.-е. 2700 саж., или около 5½ верст, — угловая величина человека равна 1', а так как 1' есть предельный угол, под которым средний нормальный глаз различает предметы, то, значит, невооруженным глазом мы можем различить фигуру человека до 4½ верст, — далее она сливается в точку. Подобным же образом вычисляются предельные расстояния для различения предметов любых размеров, а также, обратно, — предельные размеры предметов, различимых с заданного расстояния.

¹⁾ В случаях, где не требуется большая точность, можно пользоваться этим приемом для углов до 10° и даже более (см. зад. № 356).

Упражнения.

386. Диаметр «яблока» Петропавловского собора в Ленинграде 2,8 м; высота его над почвой — 118 м. Под каким углом зрения видит его наблюдатель, стоящий близ основания собора?

387. Вершина шеста, в $1\frac{1}{2}$ метра вышины, уклонилась на 2 см в сторону от того положения, которое она занимала при строго отвесном положении вежи. Какой угол составляет теперь шест с отвесным направлением?

388. Вместо того, чтобы проложить просеку под прямым углом к границе леса, ее ошибочно провели под углом в $89^{\circ}45'$ к этой границе. Длина просеки одна верста. Определить, на сколько аршин конечная точка просеки отстоит от той, где просека должна была бы кончаться.

389. Морские бои нередко ведутся на расстоянии 12 километров. На каком расстоянии от глаза нужно поместить изображение крейсера в 1 см длины, чтобы видеть его под тем же углом зрения, под каким во время подобного боя виден невооруженному глазу неприятельский крейсер длиной 150 метров?

390. Для приблизительной оценки угловой величины далеких предметов пользуются иногда следующими приемами: «Если принять глаз за вершину угла, то линии, идущие от него к концам большого и среднего пальцев [вытянутой руки], возможно более раздвинутых, образуют угол приблизительно 15° . Если одну из линий провести через кончик мизинца, то угол получается около 18° ». («Справочная книга для путешественников».) — Принимая первое расстояние за 17 см, второе за 20 см, при расстоянии от глаза 65 см, — проверьте, правильны ли эти указания.

391. В море для определения расстояния корабля до берега измеряют угол, под которым виден предмет известной высоты, стоящий на берегу. Если высота предмета (например, маяка) 30 метров, а измеренный угол равен $3^{\circ}20'$, то как велико расстояние от корабля до этого предмета?

392. Под каким (приблизительно) углом зрения видите вы ноготь указательного пальца вашей руки, вытянутой вперед? Среднее расстояние от глаза до ногтя около 60—65 см, ширина ногтя — около 1 см.

393. Товарный вагон, видимый вами вдаль, как раз покрывается по длине ногтем указательного пальца вашей вытянутой руки. Зная, что длина вагона 3 сажени, можете ли вы приблизительно определить расстояние от вас до вагона? (См. пред. зад.)

394. Полный диск Луны покрывается половиною ногтя указательного пальца протянутой вперед руки. Какое заключение можно вывести отсюда об отношении между расстоянием и размерами Луны? (См. зад. № 392.)

395. Точными астрономическими инструментами можно измерять углы в $0,02''$. На какое расстояние должен быть удален волос, чтобы поперечник его представлялся невооруженному глазу под таким углом зрения? Толщину волоса примите равной $0,1$ миллиметра.

396. Так как Земля обращается вокруг Солнца не по окружности, а по эллипсу, то расстояние ее от Солнца в течение года несколько меняется: в начале января это расстояние равно 23000 земным радиусам, а в начале июля увеличивается до 23800 земных радиусов. На сколько угловая величина Солнца в январе больше, чем в июле? *Средняя* угловая величина Солнца $32'$.

397. Планета Юпитер обращается вокруг Солнца на большем расстоянии, чем Земля. Диск этой планеты представляется земному наблюдателю (без телескопа) под углом, изменяющимся от $50''$ до $30'',4$. Во сколько раз Юпитер дальше от Солнца, нежели Земля?

398. Самая отдаленная планета, Нептун, в 30 раз дальше от Солнца, нежели Земля. Под каким углом зрения видно было бы Солнце наблюдателю на Нептуне? (См. зад. № 396).

399. Диаметр Марса составляет около $\frac{1}{2}$ земного. Под каким углом зрения мы видим его в период наибольшего приближения к нам и в период наибольшего его удаления от нас? (См. зад. № 285.) Диаметр земного шара 12700 километров.

400. Угол, под которым земной шар должен усматриваться с Солнца, измерен астрономами (косвенными приемами): он равен $17,60$ секунды. Ошибка не превышает $0,01$ секунды. Принимая диаметр Земли равным 12700 километрам, вычислите, между какими пределами заключается среднее расстояние от Земли до

Солнца. (Это расстояние в действительности и было определено астрономами подобным вычислением.)

401. Звезда Сириус, находящаяся от Земли в расстоянии 90 миллиардов ¹⁾ километров, имеет звезду-спутника. Взаимное расстояние обеих звезд усматривается с Земли под углом $10''$. Каково истинное расстояние между обеими звездами, если считать, что прямая, соединяющая их центры, перпендикулярна к лучу зрения (т.-е. к прямой, проведенной к ним от глаза)?

402. На черт. 63 воспроизведена фотография Луны в первой четверти. С какого расстояния надо смотреть на этот снимок, чтобы видеть изображение Луны такой же величины, какой мы видим Луну на небе простым глазом?

403. Какого диаметра должны быть круги на классной доске, чтобы учащиеся со своих мест видели их под одинаковым углом зрения с теми кругами (например, в 5 см диаметром), которые они чертят в тетрадях? В последнем случае расстояние примите равным 25 см.

404. Как велики должны быть буквы на классной доске и на стенных таблицах, чтобы учащиеся, сидя на своих местах, видели их столь же отчетливо, как в своих тетрадях и книгах?

405. С какого расстояния нужно смотреть на Землю, чтобы угловая величина ее равнялась угловой величине школьного глобуса 20 см диаметром, стоящего в 2 метрах от наблюдателя?



Черт. 63. К зад. № 402.
Фотографический снимок Луны.

¹⁾ Биллион — миллион миллионов.

406. Какой смысл может иметь фраза «Луна на небе видна величиной с тарелку»? Что необходимо прибавить, чтобы подобная оценка видимой величины приобрела определенность?

407. Следующее место из трагедии Шекспира «Король Лир» представляет описание вида, открывающегося с высокого крутого обрыва морского берега.

Эдгар: Как страшно!

Как кружится голова! Как низко ронять свои взоры...

Галки и вороны, которые вьются там в воздухе на средних расстояниях,

Кажутся едва ли так велики, как мухи. На полпути вниз

Висит человек, собирающий морские травы... ужасное ремесло!

Он мне кажется не больше своей головы.

Рыбаки, которые ходят по побережью, —

Точно мыши; а тот высокий корабль на якоре

Уменьшился до размера своей лодки; его лодка — плавающая точка,

Как бы слишком малая для зрения...

(Перев. И. С. Тургенева.)

Заключает ли этот отрывок указания, которые позволили бы приблизительно оценить высоту берега?

408. Можно ли при нормальном зрении отличить на расстоянии 10 верст всадника от пешехода, пользуясь биноклем, увеличивающим в три раза?

409. Можно ли с расстояния четверти километра видеть раздельно глаза человека? (См. зад. № 4.)

410. Заслуживает ли доверия показание свидетеля, утверждающего, что он невооруженным глазом различил лицо обвиняемого с расстояния 500 шагов? Средняя длина шага 80 см. (См. пред. задачу.)

411. *Расстояние ясного зрения*, — т.-е. то расстояние, на котором мы, не утомляя глаз, видим предмет наиболее отчетливо, — равно для нормального глаза 25 см. На сколько могут быть близки две точки или две черточки, чтобы на таком расстоянии они еще воспринимались нами раздельно?

412. Для близорукого глаза расстояние ясного зрения менее 25 см и может равняться, при сильных степенях близорукости, 5, даже 3 см. Зная это, объясните, почему близорукие различают мелкие подробности близких предметов — например,

читают мелкую печать лучше, нежели люди с нормальным зрением? Как велико для них предельное сближение двух различных точек? (См. пред. зад.)

413. Может ли человек среднего роста, с нормальной остротой зрения, стоя на совершенно ровном месте, видеть, как железнодорожные рельсы сходятся вдаль в одну точку? (Расстояние между рельсами нормальной колеи — 1,52 м; дальность горизонта для человека среднего роста на горизонтальной поверхности — 4,7 километра.)

414. Наименьший угол зрения, под которым нормальный глаз отчетливо различает буквы на расстоянии ясного зрения. — равен 5 минутам ¹⁾). Вычислите, на каком расстоянии буквы этой книги должны уже сливаться для нормального глаза, и чтение становится невозможным. Сравните вычисленное расстояние с действительным для каждого вашего глаза отдельно: этим способом вы определите *остроту* вашего зрения (если для какого-нибудь глаза действительное расстояние оказалось вдвое меньше вычисленного, то острота зрения такого глаза 0,5; если в 4 раза меньше, то острота 0,25; если в 5 раз меньше, то 0,2 и т. д.).

415. Бактерии имеют размеры от 0,0001 до 0,001 миллиметра. Объясните, почему до изобретения микроскопа люди не могли их видеть. Какое минимальное увеличение микроскопа необходимо, чтобы различать нормальным глазом наиболее крупные бактерии? (Ср. зад. № 411.)

416. Школьный микроскоп увеличивает в 50 раз. Можно ли надеяться рассмотреть в него красные тельца нашей крови, имеющие в поперечнике 0,007 миллиметров? (Ср. зад. № 411.)

417. Если бы на Луне существовали жители таких же размеров, как и мы, то можно ли было бы их различить с Земли в сильнейший современный телескоп, увеличивающий в 1000 раз? Каких размеров должны быть здания на Луне, чтобы их можно было различить с Земли в такой телескоп? Если бы на Луне имелось сооружение размерами с крупный океанский пароход

¹⁾ Этот угол больше 1', так как каждая часть буквы должна быть видна под углом в 1'.

(около 200 метров длины), то могли ли бы мы различить его в сильнейший современный телескоп?

418. Угол в $10''$ рассматривается через луну, увеличивающую в 6 раз. Какой величины кажется при этом угол?

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя).

В классе и дома. Определение π опытным путем — обмером окружностей колес, тарелок, небольших точеных изделий шпуром, лентой, бумажной полосой. — Рассмотрение геометрических соотношений в вело шпиде, в токарном станке, в ножной швейной машине, точильном станке, самопрялке, механизме стальных часов и т. п. — Практическое выполнение задач №№ 403, 404, 414.

Вне класса. Определение π катанием колеса, а также измерением (можно шагами) больших окружностей, начерченных на земле. — Измерение грабельным угломером угловых расстояний между звездами (для этой цели прибор собственно и предназначается); при случае убедиться, что наблюдаемое невооруженным глазом увеличение созвездий у горизонта есть явление кажущееся; с тою же целью измерять угловую величину Луны у горизонта и высоко на небе. — Практическое выполнение задач №№ 308, 313. — Измерение диаметра деревьев обмером окружности ствола.

Во время экскурсий. Приблизительная оценка расстояний и размеров отдаленных предметов (с последующей проверкой) по углу зрения, измеренному грабельным угломером (см. зад. № 353) или определенному упрощенными приемами (зад. №№ 390 — 393).

На заводе, — например лесопильном, — рассмотрение ременной и зубчатой передач, соответственные обмеры и расчеты.

XI. Площадь прямоугольника.

419. Чему равна площадь той части страницы этой книги, которая не занята текстом (т.-е. общая площадь ее полей). Какую долю всей площади страницы она составляет?

420. Длина Октябрьской железной дороги 640 км, расстояние между рельсами 1,52 м. Определить, в гектарах, площадь полосы между рельсами (считая направление дороги строго прямым линейным).

421. Самое древнее дошедшее до нас математическое руководство, так называемое «папирус Ринда» из древнего Египта, представляет собою свиток, который в развернутом виде имеет 20 метров длины и 30 см ширины. Сколько страниц современной книги, например, 15 см ширины и 22 см длины, нужно было бы занять, чтобы воспроизвести в копии эту рукопись?

422. Здесь приведены приближенные соотношения между русскими и метрическими *линейными* мерами:

$$1 \text{ дюйм} = 2\frac{1}{2} \text{ см}$$

$$1 \text{ арш.} = 0.71 \text{ метра}$$

$$1 \text{ вершок} = 4\frac{1}{2} \text{ см}$$

$$1 \text{ верста} = 1\frac{1}{15} \text{ километра.}$$

Определить приближенные соотношения между *квадратными* мерами тех же наименований.

Сколько квадратных дециметров в кв. футах?

Сколько кв. метров в кв. сажени?

Каково соотношение между обыкновенной десятиной (2400 кв. саж.) и *гектаром*, представляющим собою квадрат со стороной 100 метров?

423. Число обитателей земного шара исчисляется в 1700 миллионов человек. Каких размеров прямоугольный участок нужно было бы отвести, чтобы поместить на нем сплошной толпой все человечество, считая на одного человека по 20 кв. дециметров?

424. Зал имеет 15 метров в длину и 8 м в ширину. Какой вес составляют люди, сплошной толпой наполняющие этот зал, если человек занимает 20 кв. дециметров и весит 70 кг?

425. На молодой березе 200.000 листьев. Средняя площадь листа (с одной стороны) — 12 кв. см. Какой длины прямоугольник имеет площадь, равную общей листовой поверхности березы, если ширина прямоугольника — 10 метров?

426. Требуется оклеить обоями комнату размерами 6 арш. в ширину, 8 — в длину и 5 — в высоту. Сделайте по «Урочному Положению» (см. далее) расчет рабочих дней и материалов, необходимых для этой работы. Так как при пригонке фигур в смежных полотнищах часть обоев теряется, то при подсчете необходимого количества обоев отверстия стен из их площади обычно не вычитают. Длина бордюра в куске — 12 аршин.

Выдержка из «Урочного Положения для строительных работ» (§ 531, изд. 1914 г.):

Для оклейки стен простыми обоями с бордюром, с подклейкой бумагой и с приготовлением крахмала с клеем, на кв. саж.:

Маляров или обойщиков	0,2 —
Обоев, шириною 10 в., длиною 12 арш. . . кусок.	— 1,2
Бордюр назначать по расчету.	
Крахмала фунт.	— 1
Клею	— 0,12
Бумаги для подклейки лист.	— 33

427. При устройстве больших библиотек исходят для расчета площади помещения из следующей нормы: на каждый том должно приходиться по 0,0025 кв. саж. пола. Принимая, что ширина библиотечного зала $7\frac{1}{2}$ арш., вычислите, какой длины должен быть этот зал, чтобы вместить 6000 томов.

428. Обвод прямоугольного участка 1400 м. Длина больше ширины на 300 м. Определить площадь участка.

429. Обвод прямоугольного участка 400 м; длина в $1\frac{1}{2}$ раза больше ширины. Определить площадь участка.

430. Прямоугольный участок площадью $2\frac{1}{2}$ гектара имеет 400 м в длину. Как велик его обвод?

431. Из квадратного листа картона со стороною 15 см вырезан квадрат, площадь которого на 200 кв. см больше площади обрезков. Определить площадь вырезанного квадрата.

432. От прямоугольного листа кровельного железа весом 5 кг нужно отрезать прямоугольную полоску весом 1 кг. Как это сделать?

433. С какою силою кирпичная стена в 10 саж. вышины давит на каждый кв. вершок своего основания? Кирпич весит 10 фунтов и имеет размеры $6 \times 3 \times 1\frac{1}{2}$ вершк. (Толщины и веса слоя раствора между кирпичами в расчет не принимать.)

434. Паровоз, весящий 400 тонн, имеет 4 пары колес. Шпала может выдержать давление не свыше 25 кг на кв. см. Определить наименьшую допустимую ширину шпалы, если ширина подшвы рельса 10 см.

435. Воздух давит на все предметы близ земной поверхности с силою 1 килограмма на каждый кв. см. Выразите это давление в фунтах на кв. дюйм (линейный дюйм = 2,5 см; килограмм = 2,4 фунта) и в пудах на кв. фут.

436. Квадратный участок площадью 400 кв. м равно- велик прямоугольному, длина которого 32 м. Какой участок имеет больший обвод и на сколько?

437. Поясните чертежом справедливость равенства

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

438. Поясните чертежами следующие равенства:

$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c$$

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d$$

$$(a - b) \times (c + d) = a \times c - b \times c + a \times d - b \times d$$

439. Убедитесь на чертеже в справедливости равенств

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \times a \times b$$

$$a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$$

Вычислите, пользуясь первой формулой, чему равна площадь квадрата со стороною 103 метра? 215 м? 4,1 метра?

440. Покажите чертежом правильность следующего сокращенного приема возвышения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5:

$$35^2 = 3 \times 4 \times 100 + 25 = 1225$$

$$65^2 = 6 \times 7 \times 100 + 25 = 4225$$

$$85^2 = 8 \times 9 \times 100 + 25 = 7225$$

$$115^2 = 11 \times 12 \times 100 + 25 = 13225$$

Покажите, также графически, что сходным приемом можно перемножать множители следующего вида (цифра десятков у обоих множителей одинакова, а цифры единиц в сумме составляют 10):

$$\begin{aligned} 34 \times 36 &= 3 \times 4 \times 100 + 4 \times 6 = 1224 \\ 62 \times 68 &= 6 \times 7 \times 100 + 2 \times 8 = 4216 \\ 83 \times 87 &= 8 \times 9 \times 100 + 3 \times 7 = 7221 \\ 119 \times 111 &= 11 \times 12 \times 100 + 9 \times 1 = 13209. \end{aligned}$$

441. Вычислите в уме, чему равна площадь квадрата со стороной 55 метров? 4,5 метра? 0,35 метра? Площадь прямоугольника со сторонами 27 и 23 м? $4,6 \times 4,4$ м? 0,72 и 0,78 км? (См. пред. зад.)

442. Покажите на чертеже, что произведение $(1+a)(1+b)$, где a и b — малые дроби, можно приближенно принять равным $1+a+b$. Покажите таким же образом, что справедливы следующие равенства (где a — малая дробь):

$$\left. \begin{aligned} (1+a)(1-b) &= 1+a-b \\ (1-a)(1-b) &= 1-a-b \end{aligned} \right\} \text{приближенно.}$$

Покажите на этом основании, что если a — малая дробь, то произведение $(1+a)(1-a)$ приближенно равно 1; следовательно, $\frac{1}{1+a}$ приближенно равно $1-a$, и $\frac{1}{1-a}$ приближенно равно $1+a$.

Примените эти правила к приближенным устным вычислениям:
 $1,05 \times 1,03$? $0,97 \times 0,96$? $1,04 \times 0,98$? $1,024 \times 1,031$?
 $1,045 \times 0,982$? $\frac{1}{1,03}$? $\frac{1}{0,98}$? $\frac{1}{0,982}$? $\frac{1,04}{0,97}$? $\frac{1,04 \times 1,06}{0,97 \times 0,98}$?

443. Вычислите в уме площади прямоугольников со сторонами: 1,06 и 1,02 метра; 1,03 и 0,99 м; 0,965 и 0,98 м. (См. пред. зад.)

444. Покажите на чертеже, что выражение $(1+a)^2$, где a — весьма малая дробь, можно приближенно принять равным $1+2a$. Например. $1,003^2 = 1,006$. Покажите, также графически, что $(1-a)^2$, где a — весьма малая дробь, можно принять равным $1-2a$. Например: $\left(1 - \frac{1}{80}\right)^2 = 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40}$. Чему равно $1,002^2$? $1,0041^2$? $(1 - 0,03)^2$? $0,98^2$? $\left(\frac{33}{34}\right)^2$? Вычислите

в $\frac{1}{2}$ м? площадь квадрата со стороною 1,04 метра? 98 см? 1023 см? 999 мм?

445. Верста = 1,067 км. Вычислить сокращенно, какая зависимость между кв. верстой и кв. километром? (См. пред. зад.)

446. Пол был измерен метром, — но впоследствии обнаружилось, что метр, которым пользовались при обмере, на $\frac{1}{3}$ см короче истинного. Как нужно изменить полученную ранее величину площади пола, чтобы результат был верен?

Практические работы.

447. Изобразить наглядно, двумя прямоугольниками, сравнительный вес человека и того количества хлеба, которое он потребляет в 10 лет, принимая средний вес человека за 70 кг и полагая по 300 граммов хлеба на день.

448. Изобразить величину всей поверхности земного шара в виде квадрата со стороною в 20 сантиметров и разделить его на два прямоугольника, площади которых отвечают относительным размерам суши и водной поверхности. Каждый прямоугольник подразделить на более мелкие, соответствующие поверхностям частей света и отдельных океанов:

Поверхность частей света
в миллионах кв. км.

Поверхность океанов
в миллионах кв. км.

Азия 41

Великий 175

Африка 29

Атлантический . . . 90

Америка 38

Индийский 75

Европа 9

Северный и Южный

Австралия 7

Ледовитый 34

449. Площадь стеклянной поверхности окон классной комнаты должна составлять не менее $\frac{1}{3}$ площади пола. Удовлетворяет ли этому условию ваша классная комната?

Для частных жилищ допускается меньшее отношение, но не менее $\frac{1}{10}$. Каково это отношение для комнат вашей квартиры?

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя).

В классе и дома. Графическое изображение статистических данных: помощь площадей прямоугольников (ср. зад. №№ 447 и 448). — Измерение

площади пола классной комнаты, коридора и др. помещений — Составление смет на покраску пола, стен, дверей, побелку потолка, настилку пола и т. п.

Вне класса. Измерение площади прямоугольных участков (двора, сада, огорода), а также участков с более сложным контуром, расчленяющихся на прямоугольные составные части. — Составление смет на устройство садовых дорожек, обработку почвы, посадку, мощение и т. п.

XII. Площадь треугольника, параллелограмма и трапеции.

450. Древние египтяне пользовались следующим приемом для вычисления площади равнобедренного треугольника: умножали основание треугольника на половину его боковой стороны. Правильный ли получался результат? Преувеличенный или преуменьшенный?

451. Чтобы узнать площадь участка, имеющего форму равнобокой трапеции, древние египтяне умножали сумму оснований на половину боковой стороны ¹⁾. Получался ли при этом преувеличенный или преуменьшенный результат?

452. Из частей «китайской головоломки» (см. зад. № 231) составить следующие равновеликие фигуры:

- 1) треугольник и квадрат с равными сторонами;
- 2) параллелограм и квадрат с равными высотами;
- 3) прямоугольник и квадрат;
- 4) треугольник и прямоугольник с неравными высотами и неравными основаниями;
- 5) треугольник и трапецию;
- 6) две трапеции;
- 7) трапецию и прямоугольник с неравными высотами;
- 8) квадрат и шестиугольник;
- 9) два неравных пятиугольника.

¹⁾ Указанные в задачах №№ 450 и 451 способы определения площадей перешли от египтян к римлянам и встречаются затем в математических сочинениях средних веков. Они были в широком употреблении в допетровской Руси и применяются кое-где среди нашего сельского населения даже в настоящее время.

453. Сторона первоначального квадрата «китайской головоломки» (см. задачу № 231) равна 8 сантиметрам. Определить площадь каждой из 7 частей этой игры.

454. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. У какой из этих фигур площадь больше?

455. Треугольный участок земли, с основанием 32 м и высотой 17 м, нужно заменить равновеликим прямоугольным участком, длина которого $42\frac{1}{2}$ м. Найти ширину прямоугольного участка.

456. Поле в форме квадрата, со стороной 60 м, надо заменить равновеликим треугольным участком, основание которого 240 м. Найти высоту треугольного участка.

457. Вычислите устно, чему равна площадь прямоугольного треугольника с катетами 1,03 и 1,01 см? 0,972 и 1,016 метра? 105 и 98 см? Чему равна площадь треугольника с основанием 2,016 метра и высотой 0,992 метра? 982 миллиметров и 2046 миллиметров? (См. зад. № 443).

458. В треугольнике известны две стороны — 28 и 30 метров — и высота, опущенная на большую из этих сторон, равная 25,5 метрам. Определить высоту, опущенную на другую известную сторону.

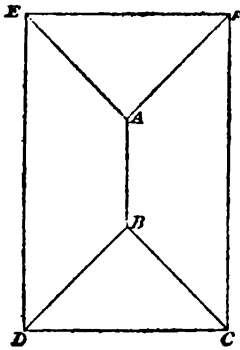
459. Сумма катетов равна 120 см; разность 100 см. Определить площадь треугольника.

460. Сторона треугольника разделена на 5 равных частей, и вторая точка деления соединена с противолежащей вершиной прямой линией. На какие части рассекает эта прямая площадь треугольника?

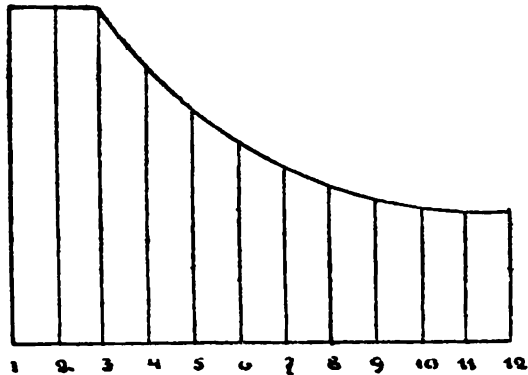
461. Каждая из двух смежных сторон параллелограмма разделена на 3 равные части, и из противолежащей им обеих вершины проведены прямые к точкам деления. Доказать, что параллелограмм делится этими прямыми на равновеликие части. Можно ли сходным приемом разделить параллелограмм на 7 равновеликих частей?

462. Огород имеет форму трапеции, основания которой — 12 м и 18 м, а расстояние между основаниями — 6 м. Сколько (по весу) нужно семян, чтобы засадить его капустой, если их требуется по $\frac{1}{2}$ грамма на каждый квадратный метр?

463. Нужно покрыть железом «шатровую» кровлю, изображенную на черт. 64. Главные скаты ее имеют форму равнобоковой трапеции, длинное основание которой равно 32 арш., а высота — 14 арш. Треугольные «вальмы» ее AEF и BCD имеют основание, равное 23 арш., и высоту 14 арш. Длина «ковька» AB — 9 арш. Для покрытия 1 кв. сажени идет (по «Урочному Положению») 12 «квadrато-аршинных» листов кровельного железа и 36 штук гвоздей. Сколько листов железа и сколько гвоздей пойдет на покрытие всей кровли?



Черт. 64. К зад. № 463
Шатровая кровля (вид сверху). AB — конек.



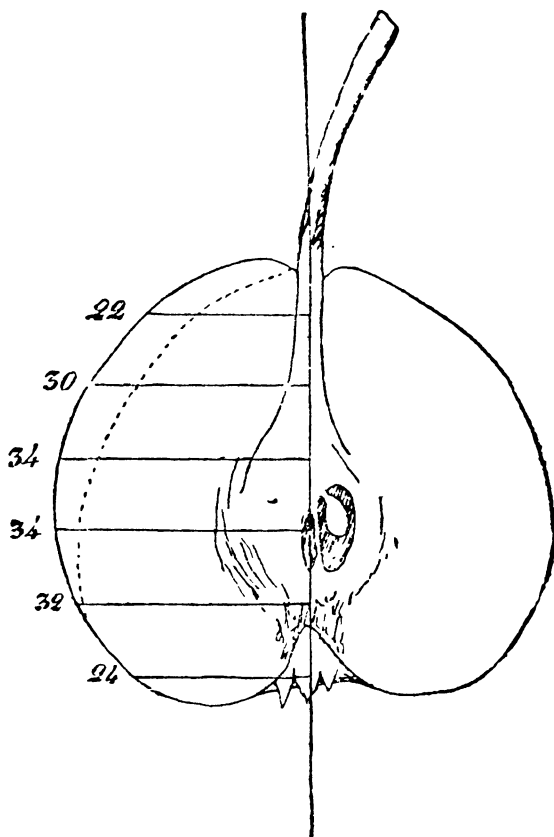
Черт. 65. К зад. № 464.

464. Вычислить площадь фигуры, изображенной на черт. 65 и ограниченной четырьмя прямыми (встречающимися под прямыми углами) и кривой. Расстояние между параллельными прямыми, разрезающими фигуру на 11 полосок, равно 6 мм. Длины этих параллельных указаны в табличке:

1 ... 45 мм	5 ... 31 мм	9 ... 18 мм
2 ... 45 »	6 ... 26 »	10 ... 17,5 »
3 ... 45 »	7 ... 23 »	11 ... 17 »
4 ... 36 »	8 ... 20 »	12 ... 17 »

465. На черт. 66 изображен в натуральную величину продольный разрез груши («сапежанки»). В расстоянии одного сантиметра друг от друга восстановлены на оси разреза перпенди-

куляры, последовательные длины которых от оси до ограничивающей кривой равны: 22, 30, 34, 34, 32 и 24 миллиметрам. Сделать недостающие измерения и определить площадь продольного разреза этой груши. Пунктирная линия показывает очертания другой половины сечения.



Черт. 66. К зад. № 465.
Продольный разрез груши.

466. Какую часть площади правильного шестиугольника отсекает его короткая диагональ?

467. Полоска 12 см длины и неравномерной ширины измерена палеткой; площадь ее оказалась равной 30 кв. см.

Какова *средняя* ширина этой полоски? (*Указание*: если бы средняя ее ширина была известна, то, умножив ее на длину, мы определили бы ее площадь.)

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя).

В классе и дома. Изготовление *палетки* (т.-е. сети квадратиков определенной ширины — в 0,1 дюйма, в $\frac{1}{2}$ см, в 2 мм и т. п.) из промасленной бумаги и измерение при ее помощи площадей неправильных фигур: листьев, крыльев бабочек, географических контуров и т. п. (измерение производится прямым счетом квадратиков; неполные квадратики оцениваются на-глаз). — Измерение площадей многоугольников превращением их в равновеликий треугольник. — Составление смет покрытия и покраски кровель и т. п.

Вне класса. Измерение площадей многоугольных участков земли тремя способами: 1) разделением диагоналями на треугольники; 2) проведением перпендикуляров к магистрали и 3) разделением на трапеции рядом параллельных прямых.

Во время экскурсий. Измерение площадей живого сечения небольшого ручья или канавы (см. зад. № 99).

ХIII. Извлечение квадратного корня.

Способы извлечения.

При геометрических вычислениях приходится часто отыскивать число, квадрат которого равен данному числу, — или, как говорят, находить (извлекать) *квадратный корень* из данного числа. Выполнение этого действия называется «извлечением квадратного корня». Квадратный корень обозначается знаком $\sqrt{\quad}$; например $\sqrt{70}$ означает «квадратный корень из 70», т.-е. число, квадрат которого $= 70$.

Способ извлекать квадратные корни рассматривается в курсах алгебры. Мы укажем здесь лишь легко усваиваемый прием приближенного нахождения квадратного корня делением. Пусть требуется найти $\sqrt{13}$. Он, очевидно, заключается между 3 и 4 (почему?) и выражается 3 с дробью. Возьмем средне-арифметическое между 3 и 4, т.-е. 3,5, и испытаем, не является ли оно искомым корнем: делим 13 на 3,5; получаем 3,71... Следовательно, $13 = 3,5 \times 3,71$; искомый корень заключается, очевидно, между 3,5 и 3,71. Находим средне-арифметическое между ними, т.-е. 3,605, и делим на него 13: получаем 3,607. Итак, $13 = 3,605 \times 3,607$. Искомый корень лежит между этими множителями, и их полусумма 3,606 — весьма близка к истинному значению корня. Значит, $\sqrt{13}$ можно принять равным 3,606; это *приближенное* значение отличается от истинного только в четвертом десятичном знаке — точность, для многих практических целей достаточная.

Найдем, тем же приемом, $\sqrt{500}$. Он, очевидно, близок к 20.
 $500 : 20 = 25$; $\frac{20 + 25}{2} = 22,5$; $500 : 22,5 = 22,2$; $\frac{22,5 + 22,2}{2} =$

$$= 22,35; 500 : 22,35 = 22,37; 500 : 22,36 = 22,36. \text{ И так, } \sqrt{500} = 22,36.$$

Найдем $\sqrt{0,7}$. Так как $0,8 \times 0,8 = 0,64$, то начнем испытания с 0,8; $0,7 : 0,8 = 0,87$; $\frac{0,8 + 0,87}{2} = 0,835$; $0,7 : 0,835 = 0,837$. Следовательно, $\sqrt{0,7} = 0,836$.

При вычислениях полезно иметь в виду, что корень из произведения равен произведению корней, а корень из дроби равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя. Например, $\sqrt{7 \times 81} = \sqrt{7} \times \sqrt{81}$; $\sqrt{360000} = \sqrt{36} \times \sqrt{10000} = 600$; $\sqrt{8} \times \sqrt{6} = \sqrt{48}$; $\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\sqrt{0,04} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = 0,2$; $\sqrt{18} : \sqrt{3} = \sqrt{18 : 3} = \sqrt{6}$. Поэтому извлечение корня значительно упрощается, если число разлагается на два множителя, из которых один очевидным образом представляет собою квадрат; например: $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4 \times \sqrt{3}$; $\sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = 8 \times \sqrt{2}$; $\sqrt{700} = \sqrt{7 \times 100} = 10 \times \sqrt{7}$ и т. п.

Для ускорения вычислений в конце книги приложена таблица квадратных корней из многих чисел от 1 до 1000. Числа, которых нет в этой таблице, либо разлагают на множители, имеющиеся в таблице, либо находят квадратный корень из них, отыскивая промежуточное число между корнями тех двух чисел таблицы, между которыми заключается данное число; при этом считают, что разность корней пропорциональна разности чисел (для приближенных вычислений это допустимо). Пусть, например, надо найти $\sqrt{234}$. В таблице имеются:

$$\sqrt{230} = 15,166; \sqrt{240} = 15,492.$$

Мы видим, что разности чисел в 10 единиц отвечает разность в корнях, равная 0,326. Значит, разности $234 - 230$, т. е. в 4 единицы, должна отвечать разность в корнях $0,326 \times \frac{4}{10} = 0,1296$, или 0,13. Следовательно, $\sqrt{234} = 15,166 + 0,13 = 15,296$.

Другой пример: $\sqrt{15837}$. Мы можем представить его в виде $\sqrt{158,37 \times 100} = 10 \times \sqrt{158,37}$, а приближенно: $10 \times \sqrt{158}$.

Находим $\sqrt{158}$ по способу, сейчас указанному; получаем 12,57. Следовательно, $\sqrt{15837} = 10 \times \sqrt{158} = 10 \times 12,57 = 125,7$.

Для приближенного извлечения квадратного корня можно в некоторых случаях пользоваться следующим удобным приемом. Так как (см. зад. № 444) при $a =$ малой дроби

$$\begin{aligned}(1+a)^2 \text{ приближ.} &= 1+2a \\ (1-a)^2 &\text{ » } = 1-2a,\end{aligned}$$

то и обратно:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+a} \text{ приближ.} &= 1 + \frac{a}{2} \\ \sqrt{1-a} &\text{ » } = 1 - \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Поэтому, например, } \sqrt{1,06} &= 1,03; \quad \sqrt{0,96} = 0,98; \quad \sqrt{\frac{39}{40}} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{40}} = 1 - \frac{1}{80} = \frac{79}{80}.\end{aligned}$$

Далее, пользуясь тем же приемом, легко вычислить в уме:

$$\begin{aligned}\sqrt{83} &= \sqrt{81+2} = 9 \times \sqrt{1 + \frac{2}{81}} = 9 \times \left(1 + \frac{1}{81}\right) = \\ &= 9 \frac{1}{9} = 9,11.\end{aligned}$$

$$\sqrt{37} = \sqrt{36+1} = 6 \times \sqrt{1 + \frac{1}{36}} = 6 \times 1 \frac{1}{72} = 6 \frac{1}{12} = 6,08$$

$$\begin{aligned}\sqrt{413} &= \sqrt{400+13} = 20 \times \sqrt{1 + \frac{13}{400}} = 20 \times 1 \frac{13}{800} = \\ &= 20 \frac{13}{40} = 20,32\end{aligned}$$

(вычисление же по таблице, с поправкой, дает 20,31).

$$\begin{aligned}\sqrt{635} &= \sqrt{625+10} = 25 \sqrt{1 + \frac{10}{625}} = 25 \times 1 \frac{5}{625} = \\ &= 25 \frac{1}{5} = 25,2.\end{aligned}$$

$$\sqrt{210} = \sqrt{225-15} = 15 \sqrt{1 - \frac{15}{225}} = 15 \sqrt{1 - \frac{1}{15}} =$$

$$= 15 \left(1 - \frac{1}{30} \right) = 14,5.$$

Полезно также применять формулы:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}} = \frac{1}{1+\frac{a}{2}} = 1 - \frac{a}{2}; \quad \frac{1}{\sqrt{1-a}} = \frac{1}{1-\frac{a}{2}} = 1 + \frac{a}{2}.$$

Например: $\frac{1}{\sqrt{1,04}} = 0,98; \quad \frac{1}{\sqrt{0,992}} = 1,004.$

Упражнения.

468. У одного древнего индусского математика (Брамагупта, VII век нашей эры) указано для π значение $\sqrt{10}$. Насколько это отличается от 3,14? Определите величину отклонения в %.

469. Инженеры рассчитывают число спиц, необходимых для шкива, по следующей формуле: число спиц $= \frac{1}{7} \sqrt{D}$, где D — диаметр шкива в миллиметрах; результат округляется до ближайшего четного числа. Определите по этой формуле число спиц для шкивов, окружности которых 5 метров; 3,8 метра; 2 метра.

470. Прямоугольный участок земли, длиною 80 м и шириною 35 м, нужно заменить равновеликим квадратным участком. Найти сторону квадратного участка.

471. Отношение длины метра к аршину иногда выражают числом $\sqrt{2}$. Согласуется ли это с другим приближенным соотношением тех же мер, а именно, что в метре $22\frac{1}{2}$ вершка?

472. Из доски равномерной толщины выпилены два квадрата; один в 7 раз легче другого. Найти отношение их сторон.

473. Площадь прямоугольника 789 кв. м. Основание вдвое меньше высоты. Определить стороны.

474. Нужно вытесать квадратный брус с площадью сечения 120 кв. см. Найти ширину бруса.

475. Какова длина изгороди квадратного сада площадью 680 кв. м?

476. Вычислить сторону квадрата, равновеликого общей поверхности всех листьев дерева, если принять, что на дереве примерно 300000 листьев, площадью каждый (с одной стороны) 20 кв. сантиметров.

477. Изобразить сравнительные размеры материков и океанов площадями квадратов (см. зад. № 448).

478. Какова длина межи кругом квадратного поля, площадью 2 гектара?

479. Докажите, что длина окружности радиуса r приближенно равна $2 \times (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times r$.

480. Напишите сразу приближенные значения выражений:

$$\sqrt{1,024} ? \quad \sqrt{0,98} ? \quad \sqrt{0,956} ? \quad \frac{1}{\sqrt{1,06}} ? \quad \frac{1}{\sqrt{0,96}} ? \quad \frac{1,03}{\sqrt{1,02}} ?$$
$$\frac{0,97 \times 1,07}{\sqrt{0,98}} ?$$

481. Вычислите сокращенно, чему равна сторона квадрата, площадь которого 10400 кв. сантиметров? 9800 кв. см? 1,05 кв. м? (См. зад. № 444.)

XIV. Теорема Пифагора. Стороны правильных вписанных многоугольников.

482. Землемеры древнего Египта строили на поле прямые углы без эккера или астролябии, а помощью лишь веревки со связанными концами и трех кольев. Веревка имела узлы, делившие ее длину на 12 равных частей. Ее перекидывали в натянутом состоянии через 3 кола, размещенных на земле таким образом, чтобы веревка образовывала треугольник со сторонами 3; 4 и 5 равных частей. Угол между короткими сторонами этого треугольника и принимался за прямой. На чем основан этот способ? ¹⁾.

483. Стороны треугольника—10 метров, 20 метров и 30 метров. Прямоугольный ли он? Есть ли прямой угол в треугольнике со сторонами 12, 16 и 20 см? 5, 12 и 13 км?

484. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого 9 см и 40 см; 11 км и 60 км; 65 м и 72 м.

485. Найти катет прямоугольного треугольника, другие стороны которого 112 и 113 м; 56 и 65 см; 99 и 101 м.

486. Пароход отплыл из гавани на север со скоростью 18 морск. миль в час. Одновременно другой пароход отплыл оттуда же на запад со скоростью 24 миль. Какое расстояние отделяло оба парохода спустя 3 часа? (Кривизны земной поверхности в расчет не принимать.)

487. Вы гребете поперек реки со скоростью 6 км в час, а течение относит вас со скоростью 8 км в час. С какой скоростью вы подвигаетесь в воде? (Ср. зад. № 200.)

¹⁾ Приемом этим у нас еще и теперь нередко пользуются при строительных работах.

488. Чему равна диагональ прямоугольного стола со сторонами 77 и 36 см?

489. Сторона первоначального квадрата «китайской головоломки» (см. зад. № 231) равна 10 см. Чему равен периметр каждой из 7 частей этой игры?

490. Длина комнаты 11,9 метра. Расстояние по диагонали 16,9 метра. Определить площадь пола.

491. Вычислить длину ребра BC шатровой кровли, изображенной на черт. 64 (см. зад. № 463) по приведенным там данным. Сколькими способами можно выполнить это вычисление?

492. Вычислить длину конька шатровой кровли (черт. 64, зад. № 463), если основание и высота треугольных вальмов 15 и 22 метра, а трапеций — 60 и 18 метров.

493. Зная, что метр $= 1,406$ аршина, докажите, что если катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны 1 аршину, то гипотенуза приблизительно равна 1 метру. Какое отсюда вытекает приближенное соотношение между кв. метром и кв. аршином? Какой длины гипотенуза, если катеты равны 1 метру? Каковы должны быть катеты, чтобы гипотенуза равнялась 1 сажени? Как воспользоваться этими соотношениями для проверки прямого угла (например, при строительных работах)?

494. Для приближенного выпрямления окружности можно пользоваться следующим приемом: строят прямоугольный треугольник с катетами, длиною в диаметр круга и в $7\frac{1}{2}$ диаметров; четверть гипотенузы, увеличенная на $1\frac{1}{4}$ диаметра круга, приблизительно равна длине окружности. Докажите это.

495. Докажите, что длина окружности приблизительно равна периметру прямоугольного треугольника, катеты которого составляют $\frac{3}{5}$ и $\frac{6}{5}$ диаметра.

496. Нужно вытесать из бревна брус с поперечным сечением 15×21 см. Какой наименьшей толщины бревно годится для этого? (Диаметр бревна измеряется в верхнем, более узком отрубе.)

497. Можно ли из бревна, имеющего в узком отрубе 10 дюймов, выпилить квадратный брус шириною в 7 дюйм?

498. Подъем двускатной кровли 5 м, пролет 12 м. Какой длины скат?

499. Как велик подъем двускатной кровли, длина ската которой 14,3 м, а пролет — 26,4 м?

500. Один катет составляет 0,99 гипотенузы. Какую долю он составляет другой катет? (Ср. зад. № 439.)

501. Один катет составляет 0,01 гипотенузы. Какую долю гипотенузы составляет другой катет?

502. Какой наибольших размеров квадратный брус можно вытесать из бревна, имеющего в верхнем отрубе 25 см?

503. Нужно вырезать стропила для двускатной кровли здания с пролетом 3,6 м при подъеме кровли — 1,2 м. Какой длины должны быть стропильные ноги?

504. Вычислить площадь равнобедренного треугольника, боковые стороны которого — 11 метров, а основание — 17,6 метра.

505. Ниже приведена выдержка из таблицы, которой руководятся при выпиливании из бревен прямоугольных брусьев или балок. Проверьте указанные в ней данные (приближенные) и заполните места, обозначенные знаками вопроса; дроби округляются до $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$.

Таблица для определения толщины бревен при вытесывании острокантового бруса или балки требуемого сечения. Размеры указаны в одинаковых единицах.

«Острокантовым» называется брус с непритупленными, незакругленными ребрами (или с весьма незначительными притуплениями).

	1	1 $\frac{1}{2}$	2	2 $\frac{1}{2}$	3	10	15
1	1 $\frac{1}{2}$	2	2 $\frac{1}{4}$?	3 $\frac{1}{4}$	10 $\frac{1}{2}$?
1 $\frac{1}{2}$	—	2 $\frac{1}{4}$?	?	?	?	?
2	—	—	2 $\frac{7}{8}$?	?	8 $\frac{3}{8}$?
3	—	—	—	—	4 $\frac{1}{2}$?	?

506. Вычислить площадь равностороннего треугольника, сторона которого 40 метров.

507. Радиус круга — 2 м. Найти площади вписанных в него квадрата и правильного шестиугольника.

508. Построить квадрат, равновеликий сумме двух данных квадратов. Разности двух данных квадратов.

509. Построить квадрат, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата.

510. Построить квадрат, площадь которого втрое больше площади данного.

511. Гюйгенс, великий математик и физик XVII века, в числе приближенных приемов выпрямления окружности, указывает следующее:

«Нужно прибавить к трем радиусам $\frac{1}{16}$ стороны вписанного квадрата».

Докажите, что это построение не менее точно, чем помощью значения $\pi = 3,14$.

512. Докажите, что длина полуокружности приближения равна стороне вписанного треугольника, сложенной со стороной вписанного квадрата. (Ср. зад. № 479.)

513. Угол выхода толчка землетрясения (см. зад. № 166) равен 30° . Горизонтальное расстояние места наблюдения от места начала землетрясения 700 км. Определить глубину очага землетрясения.

514. Рассмотрите на черт. 67 рисунок параллелограмма, составленного из спичек, и определите его площадь. Длина спички 5 см.

515. В каком случае 6 спичек ограничивают большую площадь: когда они сложены в форме прямоугольника или в форме равностороннего треугольника?

516. Что больше: площадь квадрата, вписанного в круг, или площадь равностороннего треугольника, вписанного в тот же круг? На сколько процентов?

517. Во сколько раз площадь описанного квадрата больше площади вписанного?

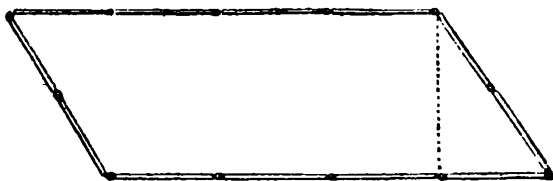
518. Сторона квадрата короче его диагонали на 82 см. Определить площадь квадрата.

519. Сторона правильного треугольника длиннее его высоты на 100 метров. Определить площадь треугольника.

520. Площадь квадрата, вписанного в круг, на 24 кв. см разнится от площади равностороннего треугольника, вписанного в тот же круг. Определить радиус круга.

521. Квадрат, равносторонний треугольник и правильный шестиугольник имеют одинаковые периметры. Определить отношение их площадей.

522. Деревянные колодцы устраиваются либо квадратные, либо шестиугольные. У квадратных длина каждой стороны «в свету» (т.-е. внутреннего сечения) делается в 1,4 м, у шести-



Черт. 67. К зад. № 514.

угольных — в 0,7 м. У какого колодца площадь внутреннего сечения больше?

523. Из листа картона вырезаны: квадрат со стороною 10 см, равносторонний треугольник со стороною 10 см и правильный шестиугольник со стороной 10 см. Определить отношение веса этих фигур.

524. Прямоугольный участок улицы, размером 6×20 метров, нужно вымостить шестиугольными пашками; ширина пашки (расстояние между параллельными сторонами) — 12 см. Сколько примерно понадобится пашек?

525. В каждом кв. дюйме пчелиных сотов насчитывается в среднем 23 ячейки, имеющие форму равных правильных шестиугольников. Определить в мм ширину одной ячейки, т.-е. расстояние между ее параллельными сторонами. 1 дюйм = 25,4 мм.

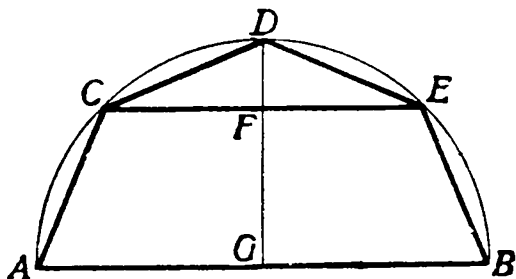
526. Обширные огородные площади засаживаются рядами овощей так, чтобы растения размещались либо на вершинах равносторонних треугольников, либо на вершинах квадратов.

Какая посадка гуще и на сколько процентов, — предполагая, что кратчайшее расстояние между растениями в обоих случаях одно и то же?

527. Биссектриса равностороннего треугольника, вписанного в круг, равна 5 дециметрам. Какой длины самая длинная хорда этого круга?

528. На чертеже 68-м изображен контур стропил мансардной крыши. Он начерчен так: полуокружность разделена на 4 равные части и точки деления соединены прямыми. Определить высоту треугольника CDE , если пролет $AB = 10$ метрам.

529. Требуется установить громоотвод (см. зад. № 214) на крыше здания, имеющего в плане форму прямоугольника со сторонами



Черт. 68. К зад. № 528.

Контур стропил мансардной крыши.

24 и 11 метров. Определить наименьшую высоту громоотвода, могущего защитить здание.

530. Какой высоты громоотвод достаточен для предохранения участка, имеющего форму равностороннего треугольника со стороною

42 метра? Прямоугольного треугольника с катетами 14 и 8,4 метра? (См. пред. зад.)

531. Требуется предохранить громоотводом участок, имеющий форму правильного шестиугольника с периметром 120 м. Какой высоты громоотвод достаточен для этого? (См. пред. зад.)

532. Две точки земного шара, лежащие на одном меридиане в 120° одна от другой, соединены прямой линией. Определить наибольшую глубину залегания этой линии под поверхностью земли. Окружность земного шара $= 40.000$ км.

533. Две точки поверхности Великого океана, лежащие на экваторе в 60° одна от другой, соединены прямой линией. Проходит ли эта линия целиком в воде или частью расположена под дном океана? (Наибольшая глубина Великого океана не пре-

восходит 10 км). Какую форму имеет в общем дно этого океана — вогнутую, плоскую или выпуклую? Радиус земного шара = 6400 км.

534. Между двумя точками земной поверхности, лежащими на одном меридиане в 90° друг от друга, волна землетрясения распространяется — по хорде, через толщу земной коры — со скоростью 11 километров в секунду. Определить время, необходимое для прохождения этого пути, и вычислить наибольшую глубину залегания этой хорды под земной поверхностью. Радиус земного шара = 6400 км.

535. Жестяники и столяры нередко пользуются следующим приемом для приближенного выпрямления окружности: откладывают на прямой 6 раз радиус данной окружности и прибавляют высоту меньшего сегмента, отсекаемого стороною вписанного квадрата. На сколько получающаяся при этом длина отличается от вычисленной по формуле $2 \times 3,14 \times r$, где r — радиус окружности?

536. Катеты прямоугольного треугольника равны 20 см и 35 см. Определить длину радиуса круга, вписанного в этот треугольник. *Указание.* Разбив треугольник на три треугольника с общей вершиной в центре вписанного круга, выразите площадь треугольника через его периметр и радиус.

537. Прямоугольная коробка со сторонами 6,6 см и 8,8 см разделена перегородкой в направлении диагонали ее основания. Поместится ли в каждом отделении этой коробки бутылка диаметром 4,2 см? (См. пред. зад.)

538. Чем выше находится глаз наблюдателя над поверхностью земного шара, тем обширнее обозреваемый им горизонт. Из точки A (черт. 69) он видит пространство, ограниченное окружностью MN , из точки B — пространство, ограниченное окружностью CD . Точки M, N и C, D суть точки касания прямой, проведенной из глаза наблюдателя, с окружностью земного шара. Расстояния AM , BC называются *дальностью горизонта* или просто *горизонтом* точки A или B .

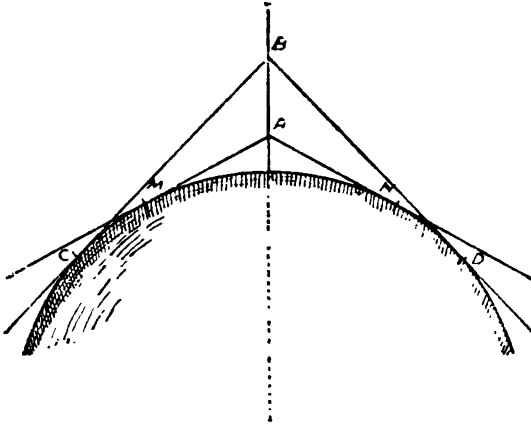
Как велика дальность горизонта для авиатора, поднявшегося на 2 км над морем? Радиус земного шара = 6400 км.

539. Как велик горизонт маяка, возвышающегося на 200 метров над уровнем моря?

540. Вычислить дальность горизонта корабля, наблюдательный пункт которого возвышается на 40 метров над уровнем моря?

541. Как далеко видит кругом себя в море человек, сидящий в лодке? Возвышение глаза над водой примите равным 1 метру.

542. На каком расстоянии от маяка находился корабль в тот момент, когда маяк открылся для него, если высота маяка — 180 метров, а высота наблюдательной точки корабля — 48 метров?



Черт. 69. К зад. № 538.
Дальность горизонта.

543. Как далеко видит вокруг себя человек среднего роста, стоящий на ровном месте? Возвышение глаза над почвой можно принять равным 1,6 метра.

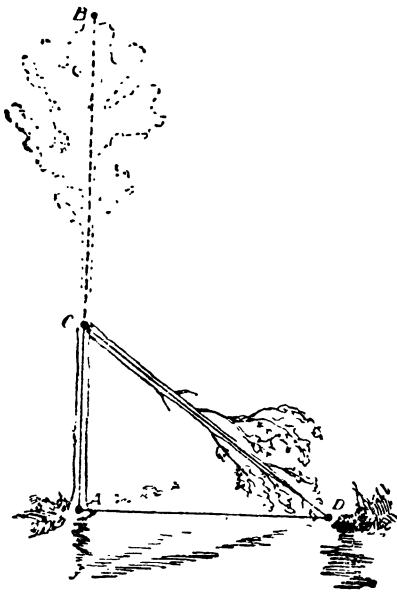
544. Как далеко видно с Эйфелевой башни, имеющей высоту 300 метров?

545. Где дальность горизонта больше — на земном шаре или на Луне? Вычислите, как велика была бы дальность горизонта для человека среднего роста (см. зад. № 543), перенесенного на одну из равнин лунной поверхности. Диаметр Луны = 3500 км.

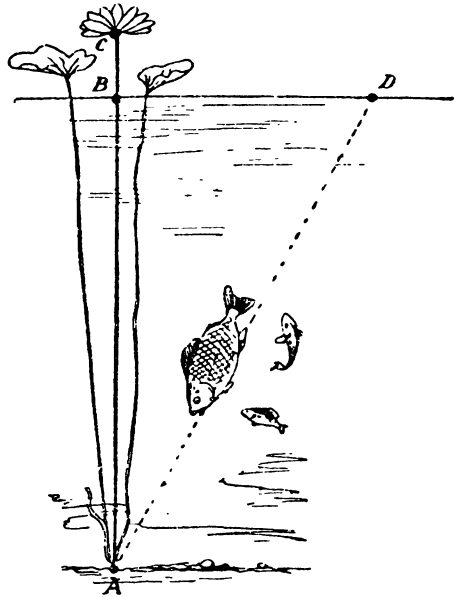
546. «Случился некоему человеку к стене лестницу прибави, стены же тоя высота есть 117 стоп. И обрете лестницу долгогоу 125 стоп. И ведати хочет, колико стоп сея лест-

вицы нижний конец от стены отстояти имать». (Из старинной «Арифметики» Магницкого, XVIII века.)

547. «Невкорме кладязе поставлена баша лествица долготю 41 стопа, а кладязь широтою во все страны по 9 стоп. И веда-



Черт. 70. К зад. № 548.
Древне-индусская задача о тополе.



Черт. 71. К зад. № 549.
Древне-индусская задача о лотосе.

тельно есть коликку оный кладязь глубину имаше». (Из «Арифметики» Магницкого, XVIII века.)

548. В сочинении индусского математика XII века Баскары находим в числе других следующую задачу ¹⁾:

Тополь.

На берегу реки рос тополь одинокий.
Вдруг ветра порыв его ствол наломал.
Бедный тополь упал. И угол прямой
С течением реки его ствол составлял.

¹⁾ Перевод Вас. И. Лебедева (в подлиннике задача изложена также в стихотворной форме).

Запомни теперь, что в том месте река
В четыре лишь фута была широка.
Верхушка склонилась у края реки.
Осталось три фута всего от ствола.
Прошу тебя, скоро теперь мне скажи:
У тополя как велика высота?

Черт. 70 поясняет задачу (не сопровождаемую в подлиннике чертежом): тополь AB сломлен в точке C на высоте 3 футов, и верхушка D в новом положении отстоит от основания A на 4 фута. Требуется узнать высоту тополя.

549. В том же древнем сочинении (см. пред. зад.) имеется задача (черт. 71):

Цветок лотоса, основание которого C при отвесном положении стебля возвышалось над водою на $\frac{1}{2}$ фута, порывом ветра отклонен на 2 фута от прежнего положения (считая по поверхности воды); при этом основание цветка оказалось на уровне воды. Определить глубину пруда в этом месте, т. - е. длину отрезка AB .

550. Пруд имеет форму квадрата. На его берегу, близ каждого угла, растет дерево. Нужно увеличить площадь пруда вдвое, сохраняя квадратную форму, и притом так, чтобы деревья остались на берегу. Как это сделать? (Старинная задача-головоломка).

551. Радиусы двух окружностей равны 7 и 11 см; линия центров = 30 см. Найти длину внешней и внутренней общей касательной (расстояния между точками касания.)

552. Объяснить, почему условие, указанное в ответе на зад. № 380, строго верно только для случая перекрещивающегося бесконечного ремня.

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя).

В классе и вне класса. Опытное подтверждение Пифагоровой теоремы взвешиванием картонных квадратов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника. — Проведение перпендикулярных прямых на местности по способу, указанному в задаче № 482.

Во время экскурсий. На ровной местности — вычисление дальности горизонта. — На лесопильном заводе — наблюдать выплывание брусьев из бревна (см. №№ 496, 497 и 505).

XV. Площадь круга.

553. В сочинении Архимеда (III век до нашей эры) «Измерение круга» впервые доказываются следующие положения:

«Каждый круг равновелик прямоугольному треугольнику, если радиус равен одному из катетов, а выпрямленная окружность равна другому катету».

«Круг относится к квадрату своего диаметра, как 11 к 14».

Покажите, что оба положения тождественны с современным правилом вычисления площади круга:

$$\text{площадь круга} = \frac{22}{7} \times \text{квадрат радиуса}.$$

554. Гениальный художник и ученый XVI века Леонардо да-Винчи пользовался следующим приемом для измерения площади круга: он катал по земле вал, ширина которого равнялась половине его радиуса; след этого вала после одного полного оборота он принимал по площади равным площади круга того же радиуса. Правильно ли это?

555. Ширина точки типографского шрифта этой книги — 0,1 миллиметра. Вообразите, что ширина ее сделалась в миллион раз больше. Какова была бы ее площадь?

556. Самая длинная хорда круга равна 75 см. Определить площадь круга.

557. Землетрясения распространяются по земной поверхности со скоростью до 800 метров в секунду. Какую площадь может охватить землетрясение через 1 минуту после своего возникновения? (Кривизны земной поверхности в расчет не принимать.)

558. Бочки обыкновенно изготавливаются так, что ширина их в самом широком месте на $\frac{1}{8}$ больше диаметра основания.

Как относится площадь дна бочки к площади ее сечения в самой широкой части?

559. Чтобы горячий чай быстрее охладился, его переливают в блюдце. Во сколько раз увеличивается при этом свободная поверхность жидкости? (Диаметр стакана примите равным 7 см, блюдца — 16 см.)

560. Зрачок человеческого глаза может изменять свой диаметр, в зависимости от яркости освещения, от 2 до 9 миллиметров. Во сколько раз расширенный зрачок пропускает больше света, чем суженный?

561. Телескопы устраиваются так, что все лучи, попадающие в отверстие телескопа, проникают и в глаз наблюдателя. Диаметр отверстия большого телескопа Пулковской обсерватории — 30 дюймов; диаметр человеческого зрачка в нормальном состоянии — 4 миллиметра. Во сколько раз глаз, наблюдающий в такой телескоп, получает от звезды больше света, чем без телескопа? (Дюйм = 25 мм.)

562. Диаметр Луны составляет 0,27 диаметра Земли. Во сколько раз полный диск Земли посылает на Луну больше света (отраженного солнечного), нежели мы получаем от полной Луны?

563. Определить площадь круглой цирковой арены, окружность которой 150 метров.

564. Во сколько раз, при одинаковой скорости течения, через трубу с диаметром 15 см протекает больше воды, нежели через трубу с диаметром 6 см?

565. Определить диаметр круглой штанги, площадь поперечного сечения которой 40 кв. см.

566. Нужно изготовить круглый стержень с площадью поперечного сечения 4 кв. см. Какую толщину ему следует придать?

567. Для водопровода нужна труба с поперечным сечением просвета не менее 80 кв. см. Каков наименьший внутренний диаметр искоемых труб?

568. Круглый стол, шириною 2 метра, накрыт квадратною скатертью в $2\frac{1}{2}$ метра ширины. Какая часть скатерти больше: лежащая на столе или свешивающаяся? На сколько?

569. Из прямоугольного куска листовой стали, размером 28 дюймов в ширину и 32 в длину, нужно вырезать круг наибольшего диаметра. Сколько кв. дюймов стали уйдет на обрезки?

570. Какую часть площади квадратного участка, шириною 84 метра, может, в лучшем случае, предохранить громоотвод высотой 20 метров? (См. зад. № 214.)

571. В цилиндре паровой машины пар давит на поршень с силою 5 кг на кв. см. Диаметр поршня — 35,6 см. Как велико полное давление пара на поршень?

572. Сваи, врытые в землю, можно нагружать до 30 кг на каждый кв. см. Какой вес может иметь строение, опирающееся на 4 сваи, диаметром 40 см каждая?

573. При каком грузе разорвется медная проволока, толщиной 1,5 мм, если известно из опытов, что предельная нагрузка, при растяжении, для меди — 40 кг на кв. мм?

574. Для ковкого железа предельная нагрузка при растяжении равна 35 кг на кв. мм. Какой толщины круглый железный стержень достаточен для удержания подвешенного к нему груза в 10 тонн?

575. Кольцевая дорога для бегов имеет внешний радиус 80 м, внутренний — 74 м. Определить площадь дороги.

576. Площадь кругового кольца, т.-е. части круга между двумя концентрическими окружностями, можно определять двояко:

- 1) вычисляя разность между площадями обоих кругов,
- 2) или же — умножая ширину кольца на длину окружности, проведенной посередине между данными окружностями.

Показать, что оба способа дают тождественные результаты.

Примечание. На практике обычно употребляется второй способ. Но первый удобнее потому, что применим также и в случае неконцентрических окружностей, лежащих одна внутри другой.

577. На лугу пасется лошадь, привязанная 5-метровой веревкой к вбитому среди луга колу. Как велика площадь, на которой лошадь может щипать траву? На сколько увеличится эта площадь, если веревка удлинится на 1 м? На сколько нужно удлинить веревку, чтобы первоначальная площадь возросла вдвое? Второе? Впятеро?

578. Диаметр Солнца виден с Земли под углом зрения $32'$. Диаметр Луны, заслонившей Солнце во время затмения, виден под углом $30'$. Какую долю обычного количества света получают от Солнца во время затмения те места Земли, в которых наблюдается такое «кольцеобразное» солнечное затмение?

579. Дно барки имеет форму прямоугольника, размером 20 м в длину и 5,5 м в ширину, с полукругами на коротких сторонах. Найти его площадь.

580. Какое окно пропускает больше света: «нормандское», имеющее форму прямоугольника, размером $1\frac{1}{2} \times 2$ м, с полукругом на меньшей стороне, или прямоугольное окно размером $1,75 \times 2,25$ м?

581. Из листа жести вырезан круг диаметром 100 мм и квадрат со стороною 85 мм. Что тяжелее?

582. Хорда, стягивающая дугу в 120° , больше хорды, стягивающей в том же круге дугу в 90° , на 16 сантиметров. Определить радиус круга.

583. Из доски выпилен круг диаметром 40 мм и равносторонний треугольник со стороною 60 мм. Что тяжелее?

584. Из жестяного круга вырезан квадрат наибольших размеров. Что тяжелее: квадрат или обрезки?

585. Из квадратного листа картона, со стороною 60 см, вырезан круг, площадь которого на 3000 кв. см больше площади обрезков. Определить радиус круга.

586. Из круга, радиус которого 30 мм, вырезан равносторонний треугольник с площадью на 2000 кв. мм меньше площади обрезков. Определить сторону треугольника.

587. На прямоугольном участке, размером 10×12 м, пасется лошадь, привязанная к столбу на углу выгона. Длина веревки — 7 м. Определить площадь недоступной для лошади части земли.

588. К кольям, вбитым по углам квадратного участка луга, привязано по лошади. Длина каждой веревки равна половине стороны квадрата. Определить в $\% \%$ площадь участка, недоступного лошадям. — Сделать то же вычисление для случая, когда луг имеет форму равностороннего треугольника.

589. В круг вписан квадрат, и на каждой стороне его, как на диаметре, описана вовне полукружность. Доказать, что

сумма площадей участков (луночек), лежащих между дугами большой окружности и полуокружностями, равна площади вписанного квадрата.

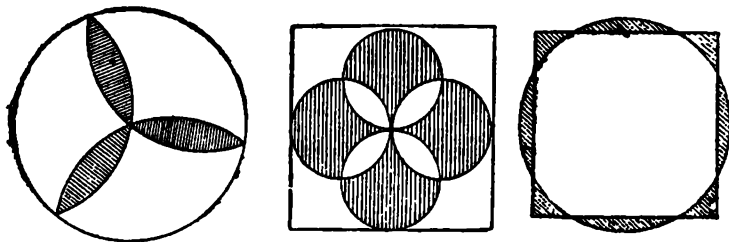
590. Вычислить площадь заштрихованных частей круга на черт. 72. Радиус круга = 100 см.

591. Вычислить площадь заштрихованных частей каждого круга на черт. 73. Сторона квадрата = 100 см.

592. Из жестиного круга, весом 9 кг, нужно вырезать сектор, весом $1\frac{1}{2}$ кг. Как это сделать?

593. Определить угол сектора, площадь которого, при радиусе 25 см, заключает 100 кв. см.

594. Радиус круга 20 метров. Вычислить сторону равнобедренного ему равностороннего треугольника. — Шестиугольника.



Черт. 72. К зад. № 590. Черт. 73. К зад. № 591. Черт. 74. К зад. № 595.

595. Из центра квадрата описана (черт. 74) окружность, радиус которой равен 0,56 стороны квадрата. Доказать, что отсекаемые окружностью части квадрата приблизительно равновелики сегментам, отсекаемым сторонами квадрата (другими словами, что такие круг и квадрат почти равновелики).

596. Доказать, что теорема Пифагора справедлива также и для кругов, т.е., что сумма площадей кругов, построенных на катетах (как диаметрах), равна площади круга, построенного на гипотенузе. — На основании этого, начертите круг, равновеликий сумме двух данных кругов. — Удвоенной площади данного круга. — Разности площадей двух данных кругов. — Половине площади данного круга.

597. В рассказе Л. Толстого «Много ли человеку земли нужно» крестьянину отводилось столько земли, сколько он успе-

вал бежать в течение одного дня. По какому контуру ему выгоднее было бежать: по квадратному, шестиугольному (правильный шестиугольник) или по кругу? *Указание:* при равенстве периметров этих фигур, какая имеет большую площадь? -

598. «Егда же кто можаше во едину вервь, которая долготы 5 аршин, связати 100 копий, и ведательно есть колико таковых же копий возможно связати другою вервью, яже долгою есть $7\frac{1}{2}$ аршин» (из «Арифметики» Магницкого. Предполагается, что пучки копий имеют в сечении очертания круга.)

599. В древней египетской рукописи (в «папирусе Ринда») находим следующее правило для определения площади круга: она равна площади квадрата, сторона которого составляет $\frac{8}{9}$ диаметра круга ¹⁾. Определить относительную ошибку такого расчета в $\frac{1}{10}\%$, принимая $\pi = 3,14$.

600. У нас в допетровскую эпоху употреблялся сходный с древне-египетским (см. пред. зад.) прием вычисления площади круга, рекомендуемый старинными русскими руководствами по землемерному делу: площадь круга приравнивалась площади квадрата со сторонами, равными $\frac{7}{8}$ диаметра. Какой способ точнее — египетский или древне-русский?

601. Землемеры допетровской Руси при определении площади круглого участка часто поступали так: считали круг равно-великим квадрату, периметр которого равен длине окружности измеряемого участка ²⁾. Какую относительную ошибку (в $\frac{1}{10}\%$) они при этом делали?

602. Какую относительную ошибку (в $\frac{1}{10}\%$) мы делаем, принимая площадь круга равной $\frac{3}{4}$ площади описанного квадрата? Укажите вытекающий отсюда удобный способ быстрого приближенного вычисления площади круга.

603. Относительным развитием береговой линии материка или острова называется в географии отношение длины береговой

¹⁾ Вот это место из папируса: «Правило, как вычислить круглое поле в 9 мер (диаметром). Каково его содержание в поверхности? Вычти его $\frac{1}{9}$, т.-е. 1; остаток 8; возьми число 8 восемь раз, это дает теперь 64. Его содержание в поверхности есть это 64».

²⁾ И этот способ восходит к временам древнего Египта: он указан, наряду с другими, в папирусе Ринда. В средние века он был широко распространен также в Западной Европе.

линии к длине окружности круга, равновеликого данному материку или острову. — Определить относительное развитие береговой линии Австралии; длина ее береговой линии — 20000 километров, площадь — 7600000 кв. км.

604. Определить относительное развитие береговой линии Европейско-Азиатского материка (см. пред. задачу). Береговая линия его 108000 км, площадь — 50700000 кв. км.

605. Ошибка при измерении шагами достигает $\frac{1}{100}$ измеряемой длины. Как велика относительная ошибка в определении площади участка, измеренного шагами? (Ср. зад. № 444.)

606. При обмере площадей угодий в усадьбе получены были следующие результаты:

пахотной земли	150	десятин
леса	112 $\frac{1}{2}$	»
луга	50	»

После обмера стало известно, что рулетка, которую пользовался землемер, была вытянутая и заключала на 2 см больше, чем 10 м. Как должны быть исправлены площади отдельных угодий? (Ср. зад. № 444.)

Практические работы.

607. Изобразите кругами отношение площадей, занятых Великим, Атлантическим и Индийским океанами (см. зад. № 448)

608. Население России со времен Петра Великого возросло так:

Г о д ы:	Ч и с л о ж и т е л е й:
1724	14 миллионов.
1796	36 »
1815	45 »
1851	69 »
1922	130 »

Изобразите постепенный рост населения России площадями кругов.

609. Городское население у нас составляло до войны 24% общей численности. Разделите круг двумя радиусами на части, площади которых отвечают указанному соотношению.

610. Разделите круг концентрической окружностью на части, площади которых относятся между собою, как численность городского и сельского населения (см. пред. зад.).

611. Запасы каменного угля в Донцком бассейне исчисляются в 56000 миллионов тонн. Ежегодная добыча его в довоенное время достигала 250 миллионов тонн. Изобразите запасы угля в Донбассе и ежегодную добычу—площами кругов.

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя.)

В классе и дома. Чертить на клетчатой бумаге круги или полукруги и счетом квадратиков (мысленно соединяя части краевых квадратиков в полные) определять площадь круга, а отсюда получать π ; определять % относительной ошибки по сравнению с $\pi = 3,14$. — Ту же работу проделать палеткой ¹⁾. — Определять таким же образом площадь секторов, сравнивая получающийся результат с вычисленным. — Начертить на картоне круг и квадрат со стороною, равной радиусу, вырезать обе фигуры и взвесить; на сколько отношение весов отличается от 3,14? — Начертить на картоне какой-нибудь географический контур (Австралия, Каспийское море и т. п.) в известном масштабе и квадрат со стороною определенной длины в том же масштабе; взвешиванием определить площадь взятого контура. Проверить результат палеткой. — Черчение диаграмм (ср. зад. №№ 607 — 610).

На экскурсии в лес. Измерять окружность деревьев лентой «на высоте груди» (лесоводственный термин — 1,3 метра от почвы) и вычислять площадь поперечного сечения. — Рассмотреть внимательно верхнюю поверхность толстого пня, найти на нем наружные (т. е. последние по времени появления) 10 годичных слоев и вычислить, какую площадь они совместно занимают. Как велика средняя площадь одного годичного слоя? Определить на том же пне среднюю площадь годичного слоя предшествующего десятилетия. Какая площадь больше (т. е. когда прирост дерева по площади сечения был значительнее)? Продолжить те же измерения до центра пня и затем, на основании полученных данных, составить в классе график возрастания площади сечения дерева за всю его жизнь.

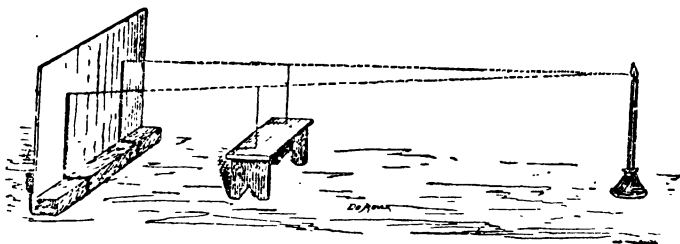
¹⁾ О палетке — см. стр. 95: «Темы практических работ».

XVI. Подобие плоских фигур.

Подобие треугольников. — Отношение площадей подобных фигур. — Свойства перпендикуляра, опущенного из точки окружности на диаметр.

612. Одно плечо шлагбаума имеет в длину 1 м, другое — 4 м. На сколько поднимается конец длинного плеча, когда конец короткого опускается на $\frac{3}{4}$ м?

613. На черт. 75 расстояние между палочками — 6 см, а между их тенями на экране — 15 см. Экран расположен



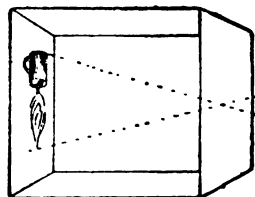
Черт. 75. К зад. № 613.

параллельно плоскости, проходящей через палочки, в расстоянии 60 см от свечи. В каком расстоянии от экрана находятся палочки?

614. Карандаш длиной 15 см, помещенный вертикально в полуметре от свечи, бросает на стену тень, длиной в $2\frac{1}{2}$ м. Определить расстояние свечи от стены?

615. От свечи (см. черт. 76) до отверстия в передней стенке ящика — 1 метр; от отверстия до противоположной стенки — 60 см. Во сколько раз изображение свечи на этой стенке меньше или больше натуральной величины?

616. На черт. 77 изображен простой способ определять высоту дерева. На чем он основан? Выполним ли он, если основание дерева недоступно? Получится ли правильный результат, если шест поставлен не строго вертикально, или если прямая AD не горизонтальна?

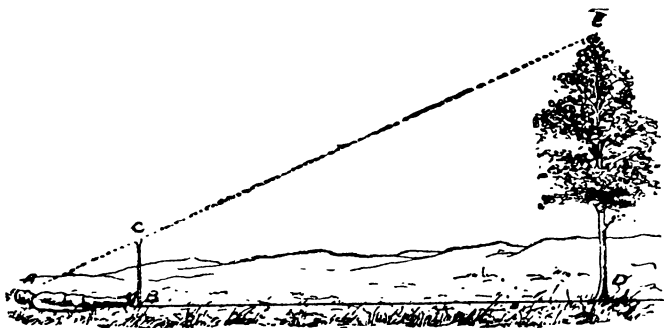


Черт. 76. К зад. № 615

617. На черт. 78 изображен способ определять расстояние от точки B на одной стороне реки до A на противоположной стороне. Точка C на прямой AB и точка D выбираются произвольно. Прямая BE проводится параллельно направлению AD (как это сделать?). —

Объяснить, в чем состоит этот способ и на чем он основан.

618. На черт. 79 изображен способ определения ширины AB озера. Прямая CD проводится параллельно AB .



Черт. 77. К зад. № 616.

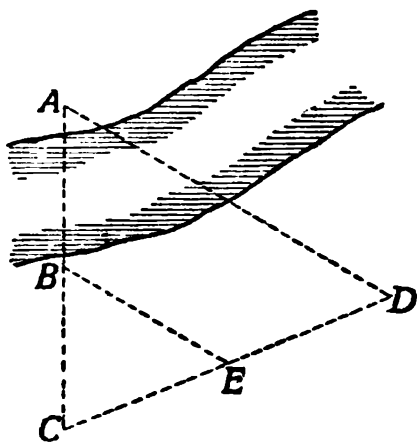
Простой способ определения высоты дерева.

Объяснить, как найти искомое расстояние? — Выполним ли этот прием, когда из точки A не видна точка B ? Когда из точки C не видна точка D ? Когда одна из точек A и B недоступна?

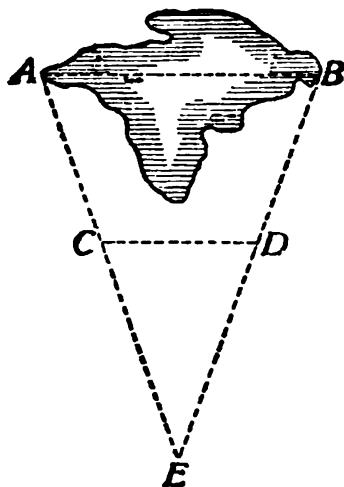
619. На черт. 80 изображен один из способов продолжения на местности прямой AB за непрозрачное препятствие. Выбирают точку C , из которой видна точка A и пространство за пре-

пятствием. Проводят CE перпендикулярно к AC и из точки B опускают на AC перпендикуляр BD . Затем вычисляют длину, равную $BD \times \frac{AC}{AD}$, и отмеривают ее на CE — до точки F , которая и должна находиться на продолжении прямой AB (почему?). Как окончить это построение?

620. Глядя на палец протянутой вперед руки попеременно правым и левым глазом, вы замечаете, что он покрывает различные точки отдаленного предмета. Зная расстояние между



Черт. 78. К зад. № 617.



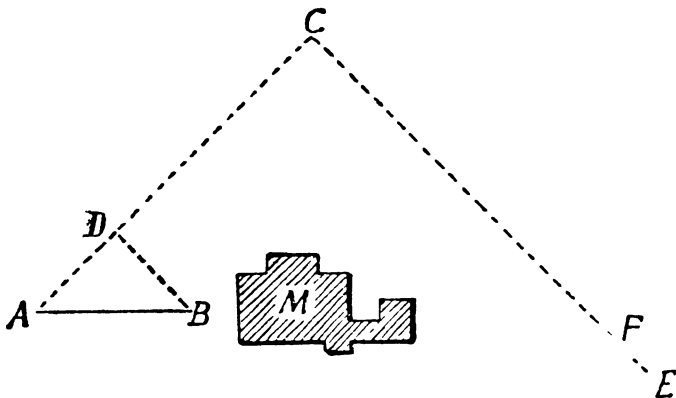
Черт. 79. К зад. № 618.

зрачками глаз ($6\frac{1}{2}$ см) и измерив расстояние от глаз до пальца в описанном положении, как можно пользоваться этими данными для оценки расстояния или величины отдаленного предмета?

621. Как далеко (приблизительно) находится от вас товарный вагон, если конец карандаша, который вы держите в протянутой вперед руке, кажется правому глазу покрывающим левый край вагона, а левому глазу — середину вагона? Длина вагона 8 м; расстояние между зрачками — $6\frac{1}{2}$ см; расстояние от глаза до карандаша — 65 см.

622. Какой доле метра приблизительно равна гипотенуза треугольника, катеты которого = половине аршина? 1 вершк? 4 дюймам? $1\frac{1}{2}$ метрам? (Ср. зад. № 493.)

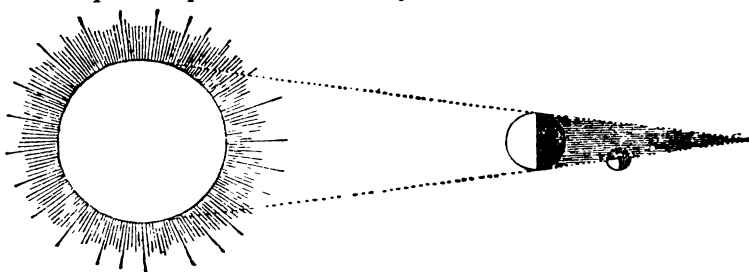
623. Диаметр Солнца больше диаметра Земли в 109 раз; расстояние от Земли до Солнца 150000000 километров. Определить длину тени, отбрасываемой земным шаром (черт. 81). Луна



Черт. 80. К зад. № 619.

обращается вокруг Земли на среднем расстоянии 380000 километров. Во сколько раз ширина земной тени на таком расстоянии больше диаметра Луны (3500 км)? Поставьте это обстоятельство в связь с лунными затмениями.

624. Вычислить длину тени, отбрасываемой Луной, и сравнить ее с средним расстоянием от Луны до Земли. (См. пред. зад.)—



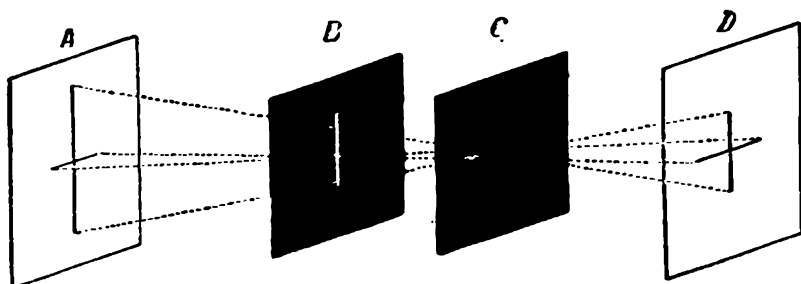
Черт. 81. К зад № 623.

Тень, отбрасываемая земным шаром. В нее погружается Луна.

Поставить полученный результат в связь с солнечными затмениями, имея в виду, что расстояние Луны от Земли может отклоняться на 20000 км в обе стороны от среднего.

625. Юпитер обращается вокруг Солнца в расстоянии 780 миллионов километров; диаметр его в 10 раз меньше диа-

метра Солнца и в 11 раз больше земного. Определить длину отбрасываемой им тени. — Один из спутников этой планеты обращается вокруг нее в расстоянии 425000 км, совершая полный оборот в $42\frac{1}{2}$ часа; диаметр его = 4000 км. При каждом обращении он погружается в тень Юпитера. Определить, как долго длится это затмение спутника, т.-е. во сколько времени он совершает путь через область тени (движения Юпитера вокруг Солнца за этот промежуток времени можно не принимать в расчет). Какой длины тень отбрасывает этот спутник и может ли она достигать поверхности Юпитера, когда центр спутника находится



Черт. 82. К зад. № 626.

Искажение изображения при прохождении лучей через две щели (крест, изображенный на *D*, получается на плоскости *A* вытянутым по высоте).

на одной прямой с центрами Юпитера и Солнца, располагаясь между ними?

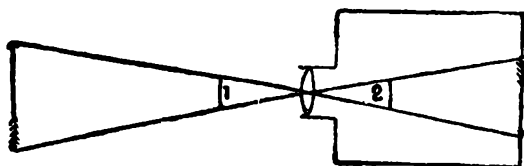
626. Объяснить, почему изображение креста *D* (черт. 82) с равными концами, после прохождения лучей через щели в пластинках *C* и *B*, получается на плоскости *A* вытянутым по высоте? Если бы расстояние *AB* равнялось *CD* и было в $1\frac{1}{2}$ раза больше *BC*, то во сколько раз вертикальная линия изображения была бы длиннее горизонтальной?

627. Черт. 83 схематически изображает ход лучей от фотографируемого предмета (стрелки) к его изображению на задней стенке фотографической камеры. Если глубина камеры (расстояние от точки пересечения лучей до задней стенки) равна 16 см, а расстояние от камеры до предмета—4 метра, то во сколько раз

фотографический снимок предмета будет меньше натуральной величины?

628. Человек, ростом 1 метр 80 см, был сфотографирован аппаратом, глубина которого 15 см. На снимке его изображение получилось высотой 6 см. С какого расстояния его фотографировали?

629. Аэроплан, шириною 12 метров, был сфотографирован снизу во время полета, когда он пролетал отвесно над аппаратом. Глубина камеры — 12 см. На снимке ширина аэроплана равна 8 миллиметрам. На какой высоте пролетал аэроплан в момент фотографирования?



Черт. 83. К зад. № 627.
Ход лучей при фотографировании.

630. Из рассмотрения черт. 83 выведите, на каком расстоянии от глаза нужно рассматривать готовый снимок, чтобы видеть изображенные на нем предметы под тем же углом зрения, под каким эти предметы усматривались из отверстия камеры ¹⁾. Если глубина камеры была 15 см, то с какого расстояния надо смотреть на готовый снимок в лупу, увеличивающую втрое?

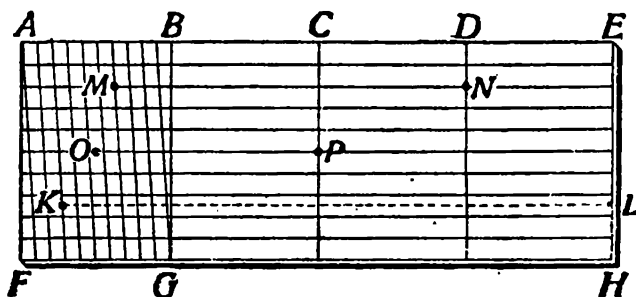
631. Глубина той камеры, которою снимают фотографии для кинематографических лент, обычно равна 6 см; ширина каждого снимка — $2\frac{1}{2}$ см. Если ширина картины на экране 4 метра, то на каком расстоянии от него нужно поместиться, чтобы картина казалась наиболее рельефной, т. е., чтобы видеть изображение под тем же углом зрения, под какими из отверстия камеры усматривались фотографируемые предметы? (См. пред. зад.).

632. На черт. 84 изображен так называемый «поперечный масштаб», в котором отрезки AB , BC , CD и DE равны каждый 2 см.

¹⁾ При этом, если рассматривать снимок одним глазом, изображение кажется наиболее рельефным.

Разберитесь в его построении и укажите, чему равны отрезки MN , OP и KL .

633. На черт. 85—86 изображено устройство и употребление прибора, называемого пантографом и служащего для перерисовывания фигур в измененном масштабе. Он состоит из четырех планок AB , BC , CD и AD , соединенных в форме параллелограмма так, что планки могут свободно вращаться в углах; поперечная планка EF располагается параллельно AD и может быть перемещена по желанию. При употреблении прибора его укрепляют неподвижно в A и обводят перерисовываемый контур штифтом K ; тогда карандаш C вычерчивает тот же контур

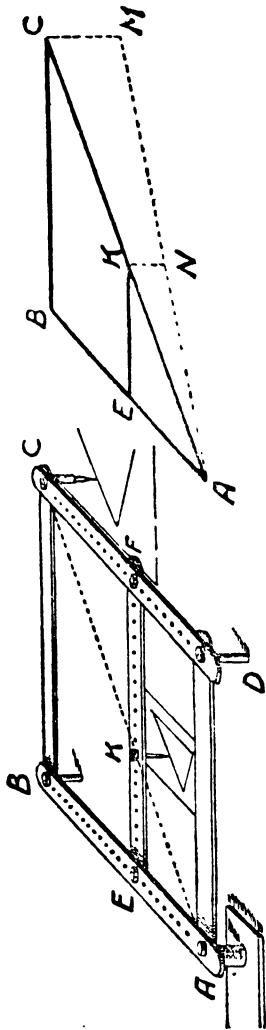


Черт. 84. К зад. № 632.
Поперечный масштаб.

в увеличенном виде; все размеры получаются во столько раз крупнее, во сколько раз AC больше AK (или AB больше AE). Если, например, штифт K (черт. 85) переместился в N , т.-е. прошел черту KN , то карандаш C переместился в M , т.-е. начертил линию CM ; из подобия треугольников ACM и AKN (почему они подобны?) имеем, что $CM:KN = AC:AK$, или $= AB:AE$. Отсюда следует, что, желая увеличить рисунок, например, в 5 раз, мы должны поместить планку EF так, чтобы AB было в 5 раз больше AE .

Укажите, как следует пользоваться пантографом для перерисовывания фигур в *уменьшенном* масштабе, например, в 8 раз.

634. В рукописях Леонардо да-Винчи имеются (без чертежа) следующие строки, описывающие способ измерить радиус земного шара:



Черт. 85 и 86. К зад. № 633.
Устройство и употребле-
ние пантографа.

из 5 равных квадратов). Площадь большего креста вдвое больше площади меньшего. Каково отношение между их сторонами?

«Если хочешь измерить, какое расстояние между центром Земли и ее поверхностью, то поступай так: поднимись на колокольню вышиною в 100 сажень (обозначим ее буквами de); затем навесь снаружи две (горизонтальные) палки cd и db , а к каждой палке привяжи по тонкой нитке, спускающейся с куском свинца до земли, и пусть эти нитки будут cr и bs . Посмотри и измерь затем, на сколько пространство rs короче, чем cb , и, если оно меньше на столько, сколько от a до b , то сколько раз ab помещается в as , столько же раз cb будет до центра Земли».

Разобраться в этом отрывке, сделав соответствующий чертеж, и объяснить, на чем основан этот способ.

635. От треугольного листа кровельного железа, весом 5 кг, надо отрезать параллельно стороне полосу весом 2 кг. Как это сделать?

636. Треугольный участок нужно разделить на три равные части прямыми, параллельными одной его стороне. На каком расстоянии от вершины должны проходить границы отдельных участков?

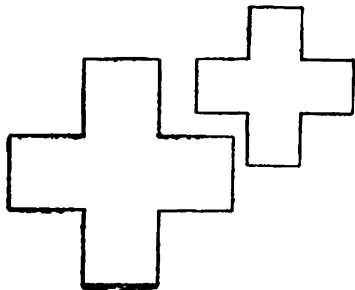
637. План некоторого участка земли начерчен в масштабе 100 метров в 1 см. Во сколько раз площадь участка больше площади плана?

638. На черт. 87 изображены два греческих креста (каждый составлен

639. Были измерены лист одуванчика, росшего в тенистом месте, и такой же формы лист другого одуванчика, росшего на солнце. Длина первого — 31 см, второго 3,1 см. Во сколько раз площадь листа, выросшего в тени, больше нежели у листа, выросшего на солнце?

640. Длина ладони взрослого человека — $11\frac{1}{2}$ см, ладони ребенка — 7 см. Если форма руки у обоих одинакова, то во сколько раз площадь ладони взрослого человека больше площади детской ладони?

641. Была измерена палеткой площадь листа серебристого тополя, сорванного от выросшей в густой тени корневой поросли, и такой же формы листа с поверхности кроны (росшего на солнце). Площадь первого оказалась в 20 раз больше. Во сколько раз лист поросли шире листа из кроны?



Черт. 87. К зад. 638.

642. Имеются два липовых листа одинаковой формы. Один лист на $\frac{1}{4}$ длиннее другого. Определить отношение их площадей.

643. Какой длины должен был бы быть лист, имеющий форму березового, если площадь его должна равняться сумме площадей всех листьев березы? Число листьев на дереве примите равным 200 тысячам, среднюю площадь листа — 12 кв. см, среднюю длину его — 4 см.

644. Докажите, что теорема Пифагора относится не только к квадратам, но и ко всяким подобным многоугольникам (и треугольникам), т.-е., что если на катетах и гипотенузе построены подобные многоугольники (или треугольники), то сумма площадей фигур, построенных на катетах, равна площади фигуры, построенной на гипотенузе (ср. зад. № 596).

645. На прямой отложены, один за другим, отрезки в 1 см и в 3 см. На сумме отрезков, как на диаметре, построен полукруг, и из точки, отделяющей отрезки, восстановлен перпендикуляр. Докажите, что длина перпендикуляра между диаметром

и окружностью равна $\sqrt{3}$ см (и убедитесь на тщательно исполненном чертеже, что длина его $= 1,7$ см).

646. Каким способом можно графически найти $\sqrt{5}$? (См. пред. зад.)

647. Извлечь графически квадратные корни из следующих чисел: 10; 35; 17; 165. (См. зад. №№ 645 и 646.)

648. Как осуществить тот же способ (см. пред. зад.) графического извлечения корня на местности?

649. Мансардным строилам часто придают такую форму, что хорда CE (черт. 68), параллельная диаметру, отстоит от него на $\frac{1}{3}$ радиуса. Определить длину этой хорды, если $AB = 10$ метрам.

650. Диаметр полуокружности, длиною 100 метров, разделен в отношении 1 : 3. Из точки деления восстановлен перпендикуляр до пересечения с окружностью, и точка пересечения соединена с концами диаметра. Определить длину перпендикуляра и отношение длин двух полученных хорд.

651. Для построек часто требуются брусья прямоугольного сечения с отношением $\sqrt{2} : 1$ (практически 7 : 5). Начертание такого сечения на отрубе бревна обычно выполняется следующим образом. Проводят черту через центр сечения, делят этот диаметр на три равные части, из точки деления восстанавливают перпендикуляры в противоположные стороны до окружности, и точки пересечения их с окружностью соединяют прямыми линиями с концами диаметра. — Докажите, что при этом получается прямоугольник с требуемым отношением сторон. (См. пред. зад.)

652. В каменном своде «стрелка» свода, т.-е. высота соответствующего сегмента, должна составлять не менее $\frac{1}{12}$ пролета. Определить наибольший радиус дуги свода для пролета в 8 м.

653. Бревно, диаметром в узком отрубе 8 дюймов, распиливают на лесопильном заводе тремя параллельными пропилами на 4 доски, из которых две крайние (горбыли) имеют в толщину по $1\frac{1}{2}$ дюйма, а две средние — по два с половиной. Определить ширину обеих сторон средней доски в узком конце. (Толщину пропила в расчет не принимать.)

654. Если между двумя точками земной поверхности по хорде меридиана (или «большого круга») прорыть туннель, дли-

ною 100 километров, то какова будет наибольшая глубина залегания туннеля под земной поверхностью? (Ср. зад. № 356.)

655. Какова форма дна—выпуклая или вогнутая—у моря, простирающегося по меридиану (вообще по дуге большого круга) на 5° и имеющего равномерную глубину 200 метров? Длину хорды, стягивающей дугу в 5° , можно для приближенных вычислений принять равной длине дуги (ср. зад. № 356). — Каково должно быть протяжение моря по меридиану, чтобы, достигая наибольшей глубины посередине в 100 метров, оно могло иметь *плоское дно*?

656. Длина хорды, стягивающей дугу железнодорожного закругления, — 100 метров. «Стрелка» дуги (см. зад. 652) равна 2,5 метра. Определить радиус закругления.

657. На практике часто находят радиус железнодорожного закругления приближенно следующим приемом. Соединяют две точки дуги закругления прямой линией и измеряют расстояние между серединою этой хорды и серединою дуги, т.-е. «стрелку» дуги (докажите, что она перпендикулярна к хорде!). Половину длины хорды возводят в квадрат, и результат делят на длину стрелки. В частном получают *диаметр* дуги закругления. На чем основан этот способ? Строго ли он правилен? В каких случаях погрешность его должна стать ощутительной?

658. Примените сходный прием вычисления (см. пред. зад.) к решению задачи: определить высоту маяка над уровнем моря, если горизонт его — 20 км.

659. Горизонт корабля—12 км. Определить высоту наблюдательного пункта корабля («марса») над водой.

660. Для быстрого определения радиуса закругления уложенного железнодорожного пути поступают иногда следующим образом. Проводят прямую, касательную к внутреннему рельсу, и измеряют ее длину между точками пересечения с другим рельсом. Затем подыскивают в особой таблице радиус дуги, отвечающей, при данной хорде, длине стрелки в 1,52 м (ширина колеи). — Как воспользоваться тем же приемом, обходясь без таблиц? Пример: длина хорды, измеренной указанным способом, — 100 м; найти радиус закругления.

661. Ниже приведены выдержки из таблицы, употребляемой при определении радиуса, хорды или стрелки жел.-дор. закругления и вообще при так называемой «разбивке закруглений», т.-е. при разметке линии кривой части пути. Разъяснение графы 4-й см. в пред. зад. — Проверить данные таблицы и заполнить в ней те места, которые обозначены знаками вопроса. (Можно при этом пользоваться способом приближенного вычисления, указанным в задаче № 657).

Радиус в метрах.	Стрелка дуги при хорде.		При стрелке = = 1,52 м, длина хорды:
	10 метров.	20 метров.	
1000	0,013	0,05	111
900	?	0,056	?
?	0,023	0,091	?
300	0,042	?	60,4
250	?	?	?

662. К окружности, радиусом 500 метров, проведена касательная. Из точки ее, лежащей в 10 метрах от точки касания, восстановлен перпендикуляр к касательной. Вычислить длину отрезка перпендикуляра между касательной и окружностью. Вычислить длину таких же отрезков в расстоянии 20, 40 и 60 метров от точки касания. Как воспользоваться этими величинами для разбивки закруглений на местности, т.-е. для разметки на земле кривой данного радиуса?

663. Конец маятника, длиной 60 см, в крайних положениях поднимается над уровнем среднего положения на 1,5 см. На какое расстояние от линии среднего положения удаляется при этом конец маятника?

664. Вычислить радиус кривизны часового стекла шириною 4 см и глубиною 2 миллиметра (т.-е. определить радиус дуги круга, если стягивающая ее хорда = 4 см, а стрелка — 2 мм).

665. Вычислить радиус кривизны вогнутого зеркала, шириною 10 см и глубиною 0,6 мм.

666. Вычислить радиус кривизны вогнутого зеркала, шириною 16 см. и глубиною 1,5 мм.

667. Толщина симметричного двояковыпуклого стекла 1,6 миллиметра, ширина — 3,6 см. Вычислить радиус кривизны.

Темы практических работ.

(Указания для преподавателя.)

В классе и дома. Увеличение и уменьшение фигур помощью пучка прямых. Перерисовывание по квадратам. Изготовление пантографа и работа с ним. Черчение поперечного масштаба и пользование им. — Определение площадей участков по готовому плану. — Определение радиуса кривизны выпуклых линз (по толщине и диаметру: толщину измерять стопкой бумаги, накладывая на линзу и на стопку пластику и устанавливая ее горизонтально), сферических зеркал, часовых стекол. — Извлечение квадратных корней построением (зад. №№ 645—646). — Практическое выполнение задач типа №№ 627—630 и №№ 639—642.

Вне класса. Съемка плана местности мензулой (по способу обхода или из одной точки) и астролябией. — Извлечение квадратных корней построением на местности (зад. № 617, можно измерять расстояния шагами). — Примерная разбивка закруглений. (См. зад. №№ 661—662.)

Во время экскурсий. Вычисление разности высот двух точек железно-дорожного полотна по отметкам наклона на указательных столбиках (см. зад. № 354 и примеч. к ней). — Определение радиуса закругления ж.-д. пути шоссе и т. п. (См. зад. №№ 656, 657, 660.) — Определение расстояний недоступных предметов различными приемами, основанными на подобии. — Определение высоты деревьев, зданий и т. п. помощью самодельных приборов, основанных на подобии (например, картонного прямоугольника с отвесом). —

На лесотильном заводе. Рассмотреть «поставы» (размещение) пил при распиловке бревен на доски. (См. зад. 653.)

XVII. Вычисление поверхности и объема тел.

Прямоугольный параллелепипед, прямая призма, пирамида, цилиндр, конус, шар. Отношение поверхностей и объемов подобных тел.

Извлечение кубического корня. При решении некоторых задач этого отдела понадобится отыскивать число, которое, будучи умножено само на себя *дважды*, составит данное число. Такое число называется «кубическим корнем» или «корнем третьей степени» из данного числа, а нахождение его — «извлечением» кубического корня. Куб. корень обозначается знаком $\sqrt[3]{}$; например $\sqrt[3]{8} = 2$. Способ извлекать кубические корни рассматривается в курсах алгебры. В конце этой книги дается таблица кубических корней из многих чисел от 1 до 1000. Кубические корни из чисел, пропущенных в таблице, можно вычислять приближенно, точно так же, как было указано для корней квадратных. *Пример:* найти $\sqrt[3]{227}$; $\sqrt[3]{220} = 6,037$; $\sqrt[3]{230} = 6,127$; разность этих чисел = 10, разность куб. корней = 0,09; для 227—220, т. е. для 7 единиц разность должна равняться $0,09 \times 0,7 = 0,063$. Следовательно, $\sqrt[3]{227} = 6,037 + 0,063 = 6,1$. Это и есть приближенное значение искомого корня.

668. Сколько весит полуметровый слой снега на квадратной площадке со стороною в 10 м, если 1 куб. м снега весит в среднем 150 кг?

669. У нас при сильном проливном дожде выпадает в 1 час слой воды в 37 миллиметров высоты. Определить вес воды, выпавшей при таком ливне, длившемся $1\frac{1}{4}$ часа, на прямоугольном поле длиною 100 метров и шириною 80 метров. Куб. метр воды весит 1 тонну (61 пуд.).

670. При укладке дров в поленицы пустые промежутки составляют в общей сложности $\frac{1}{3}$ объема поленицы. Сколько весит куб. сажень сухих березовых дров, если куб. см березовой древесины весит 0,7 грамма? 1 саж. = 2,13 м.

671. В следующей таблице заполните места, обозначенные знаками вопроса:

Меры для кладки дров.

Название кладки и местности.	Длина кладки в аршин.	Высота кладки в аршин.	Ширина кладки в аршин.	Объем кладки в сажень.
Семерик, на Волге	21	4	1	?
Уральская сажень . . .	14	2	?	2,074
Заводская саж. Моск. г. .	?	3	$1\frac{1}{2}$	1,667
Товарник, береговая . . .	$3\frac{1}{2}$?	$2\frac{1}{4}$	1,667
Фишлявская сажень . . .	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	2	?
Полуаршинная (Ленинград).	3	3	$\frac{1}{2}$?

672. Один рабочий в неделю может настругать полтора миллиона спичечных соломпонок, каждая 5 см в длину и 2 мм в толщину и ширину. Сколько куб. дециметров дерева уходит в неделю на эту работу (обрезков в расчет не принимать)?

673. У квадратного листа картона со стороною 60 см отогнуты краевые полоски шириною 10 см так, что получилась открытая коробка. У другого листа тех же размеров отогнуты таким же образом полосы шириною 6 см, у третьего — 15 см. Какая из трех полученных коробок имеет наибольшую вместимость?

674. Нужно перегрузить на крестьянской телеге чисто-обрезные сосновые доски, шириною 8 дюймов и толщиной 2 дюйма.

Сколько погонных сажен таких досок можно наложить на одну телегу? Куб. фут соснового дерева весит 35 фунт.; наибольшая кладь для крестьянской телеги — 30 пудов.

675. Лед тает тем медленнее, чем меньше его поверхность, соприкасающаяся с окружающим воздухом. Привезено 162 куб. м льда. Как выгоднее сложить его для замедления таяния: в форме куба, или в форме прямоугольного параллелепипеда с основанием 3×2 м.

676. Один из самых больших метеоритов (падающих камней) имеет приблизительно форму прямоугольного параллелепипеда 4 метра длиною, $2\frac{1}{2}$ метра шириною и 2 метра вышиною. Куб. сантиметр его вещества весит 4 грамма. Сколько весит этот метеорит? (Он найден в 1894 г. близ мыса Иорк.)

677. В микроскоп усмотрена крупинка поваренной соли кубической формы, с длиною ребра 0,01 миллиметра. Куб. см поваренной соли весит 2 грамма. Сколько таких микроскопических крупинок должно пойти на 1 фунт? (Фунт = 409 г.)

678. В кубическую коробочку, с ребром в 1 см, насыпана доверху дробь. Диаметр каждой дробинки — 1 миллиметр. Сколько (приблизительно) дробинок заключается в коробке?

679. Установлено, что на лесопильных заводах в куб. метре воздуха бывает до 0,017 грамма пыли. Сколько пыли (по весу) вдыхает в себя рабочий на таком заводе в течение 8-часового рабочего дня? Сколько он вдыхает в год, считая 300 рабочих дней в году? Человек ежеминутно делает в среднем 18 вдыханий, вводя с каждым вдыханием в свои легкие 0,2 литра воздуха.

680. Для здоровья учащихся необходимо, чтобы в классе на каждого ученика приходилось не менее 6 куб. метров воздуха. Класс имеет 10 метров в длину, 6 метров в ширину и $3\frac{1}{2}$ метра в высоту. Сколько учеников могут в нем находиться без вреда для здоровья?

681. Сколько весит погонный метр квадратного железа толщиной 5 см? Куб. см железа весит 8 граммов.

682. Сколько весит кв. метр медного листа толщиной в $2\frac{1}{2}$ миллиметра? Цинкового в $1\frac{1}{2}$ мм толщины? Куб. см меди весит 9 граммов, цинка — 7 граммов.

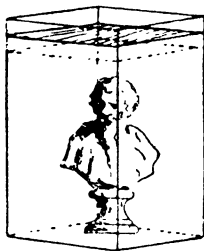
683. Лист кровельного железа размером $1,4 \times 0,7$ м весит 5 кг. Какой он толщины? Куб. см железа весит 8 граммов.

684. На позолоту 1 кв. метра купола идет 1 грамм золота. Какова толщина слоя позолоты? Куб. см золота весит 20 граммов.

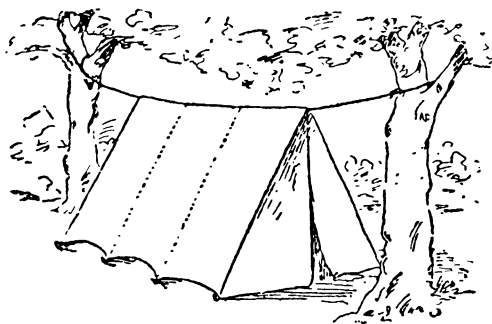
685. Статуэтка (черт. 88) погружена в ящик с водой. Размеры дна ящика 15×10 см. Уровень в сосуде поднялся при этом на $1\frac{1}{2}$ см выше, чем до погружения. Определить объем статуэтки.

686. Каким способом могли бы вы определить объем кисти вашей руки? (См. пред. зад.)

687. Какой объем воздуха заключает палатка, изображенная на черт. 89? Ширина ее $1\frac{1}{2}$ м, длина 4 м, высота $2\frac{1}{4}$ м.



Черт. 88. К зад. № 685.



Черт. 89. К зад. № 687.

688. Сколько литров в шестиугольном колодце, глубиною 1 метр, если длина каждой стенки «в свету» 70 см.

689. Снежинка в форме шестигранной (правильной) призмы имеет диаметр основания 0,14 мм, а высоту — 0,34 мм (средние размеры). Сколько весит миллион таких снежинок? Куб. см льда весит 0,9 грамма.

690. Нужно вырыть в глинистой почве прямую канаву в 360 м длины и $1\frac{1}{2}$ м глубины; ширина канавы вверху — 4 м, у дна — 2 м. Сколько рабочих дней нужно для этой работы, если на извлечение 10 куб. м земли в таком грунте требуется, по «Урочному Положению», 4 рабочих дня?

691. Величайшая из пирамид Египта (пирамида Хеопса) достигала в высоту 146 метров; ее квадратное основание имел

233 метра в ширину ¹⁾. Предполагая, что она сплошь сложена из камней, вычислите, какой высоты каменную стену, толщиной в полметра и длиною от Ленинграда до Москвы, можно было бы соорудить из ее материала (расстояние = 640 километров)?

692. Алмаз имеет форму многогранника, составленного из 8 равносторонних треугольников (двух четырехугольных пирамид, приложенных друг к другу своими квадратными основаниями). Сторона каждой треугольной грани этого *октаэдра* равна 4 миллиметрам. Определить вес алмаза в каратах. Карат = 0,2 грамма. Куб. см алмаза весит 3,5 грамма.

693. Стог соломы имеет форму прямоугольного параллелепипеда с пирамидальной верхушкой. Размеры основания стога 4×6 м; высота до основания пирамиды—4 м, до вершины пирамиды—3 м. Сколько пудов соломы в этом стоге? Куб. м соломы весит 100 кг.

694. Река, шириною в 25 метров и средней глубиной в 4 метра, имеет среднюю скорость течения 6 километров в час. Сколько ведер воды проходит через ее живое сечение в 1 секунду? В куб. метре—80 ведер.

695. Ширина Невы у Летнего сада—700 м; средняя глубина ее — 20 м; средняя скорость ее течения — 3 м в секунду. Во сколько времени протекает через живое сечение Невы мимо Летнего сада 1 кубический километр воды?

696. Ниже приведены величина поверхности и средняя глубина океанов:

	поверхность:	средн. глубина:
Великого	175 милл. кв. км.	3,9 км.
Атлантического . .	90 " " "	3,9 "
Индийского . . .	75 " " "	4,1 "

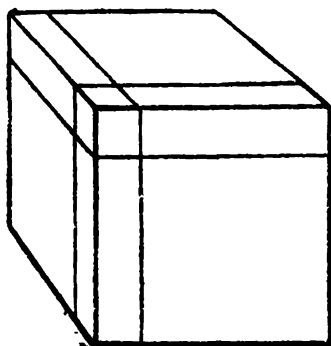
Каких (приблизительно) размеров куб можно было бы образовать из всей этой воды?

¹⁾ Таковы были первоначальные размеры этой пирамиды; в течение тысячелетий она частью выветрилась с поверхности, и в настоящее время размеры ее меньше.

697. Почему в суженных частях речного русла вода течет быстрее, а в расширенных — медленнее? *Указание:* Сохраняла ли бы вода в реке постоянный уровень, если бы количество воды, протекающее через живое сечение реки в широких и в узких частях, не было одинаково?

698. При каждом ударе сердце человека выталкивает 175 куб. см крови. Сердце делает 75 ударов в минуту. Каких размеров кубический сосуд потребовался бы, чтобы вместить количество крови, перекачиваемое сердцем в течение одних суток?

699. Какой высоты получился бы столб, если бы поставить один на другой все кубические миллиметры одного куб. метра?



Черт. 90. К куб. м 100.

700. Докажите помощью чертежа 90 правильность равенства:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3 \times a^2 \times b + 3 \times a \times b^2.$$

701. Покажите помощью чертежа, что выражение $(1 + a)^3$, когда a есть малая дробь, можно приближенно принять равным $1 + 3a$ (см. пред. зад.). На этом основании напишите сразу, чему равно $1,007^3$? $1,02^3$? $1,0005^3$? Вычислите сокращенно, чему равно $6,004^3$? *Указание:* $6,004 = 6 \left(1 + \frac{4}{6000} \right)$. — Чему

равно $10,02^3$? Напишите прямо, чему равен $\sqrt[3]{1,006}$? $\sqrt[3]{1,013}$?

702. Чему равно ребро куба, объем которого 1,009 куб. метра? 1,024 куб. аршина? 8,048 куб. саж.? (См. пред. зад.)

703. Вычислить, пользуясь формулами зад. 701, следующие кубич. корни:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{67}. \quad \text{Указание: } \sqrt[3]{67} &= \sqrt[3]{64 + 3} = \\ &= \sqrt[3]{64 \left(1 + \frac{3}{64} \right)} = 4 \sqrt[3]{1 + \frac{3}{64}}. \end{aligned}$$

$$\text{Вычислить } \sqrt[3]{29} \quad \sqrt[3]{129} \quad \sqrt[3]{10}?$$

704. Вычислить в уме:

$$\frac{\sqrt[3]{1,06} \times \sqrt[3]{1,012}}{1,035 \times 1,025} ? \quad \sqrt[3]{\frac{1,03^3 \times 0,96^2}{\sqrt[3]{0,93^3 \times 1,01}}} ?$$

705. Исходя из приближенного равенства $(1 + a)^3 = 1 + 3a$, докажите, что $(1 - a)^3 = 1 - 3a$, где a — малая дробь. Ука-

зание: $(1 - a)^3 = \left(\frac{1}{1 + a}\right)^3 = \frac{1}{1 + 3a}$. Докажите также, что

$$\sqrt[3]{1 - a} = 1 - \frac{a}{3}. \text{ Вычислите в уме: } \sqrt[3]{0,97} ? \sqrt[3]{0,991} ?$$

$$\sqrt[3]{\frac{37}{40}} ? \sqrt[3]{\frac{67}{70}} ?$$

706. При обмере кубатуры (объема) корабельного трюма пользовались метром, который, как впоследствии обнаружилось, был на $\frac{1}{2}$ сантиметра короче истинного метра. Как надо изменить результат, чтобы получить правильную кубатуру? (См. зад. № 701.)

707. При обмере кубатуры амбара мерной лентой, длиною 10 метров, получен был результат 2 200 куб. метров. Впоследствии обнаружилось, что деления ленты начинались, отступя 6 см от края, и что мерщик упустил это обстоятельство из виду. Как должен быть исправлен результат? (Допускает ли эта задача вполне точное решение?)

708. Нужно покрасить круглую печь диаметром $1\frac{3}{4}$ м и высотой 3 м. Сколько потребуется для этого олифы? На кв. м идет 250 г олифы.

709. Нужно покрасить 200 фонарных столбов, имеющих форму цилиндров в 5 м высоты и 20 см в диаметре. Сколько рабочих дней и олифы понадобится для этого, если на окраску требуется на каждый кв. м по 0,04 раб. дня и по 250 г олифы?

710. Сколько пудов цинка нужно для изготовления цинковой водосточной трубы длиною $6\frac{1}{2}$ саж., при наружном диаметре 5 дюймов? На кв. сажень поверхности трубы идет 2,6 пуда цинка.

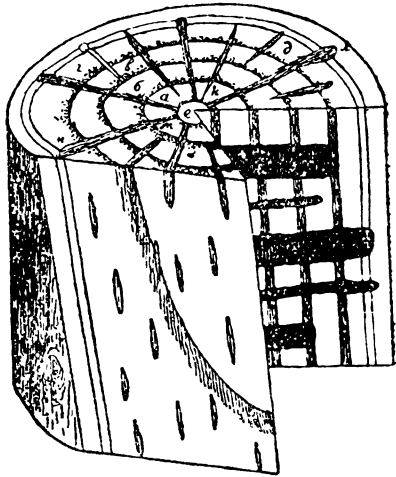
711. Сколько кирпичей потребуется, чтобы сложить цилиндрический свод в 4 саж. пролетом и 8 саж. длины? Дуга цилиндрического свода должна составлять $\frac{1}{6}$ окружности. На 1 кв. сажень свода требуется 221 кирпич.

712. Паровой котел паровоза во всю длину прорезывается 200 дымогарными трубками, омываемыми водою в котле. Как велика общая поверхность соприкосновения воды с дымогарными трубками, если наружный диаметр трубок 4 см, а длина 2,5 метра?

713. В каждом куб. миллиметре человеческой крови насчитывается 5 миллионов так называемых «красных кровяных телец». Каждое тельце имеет форму, близкую к уплощенному цилиндру, диаметром 0,007 мм и высотой 0,002 мм. Зная, что среднее количество крови у взрослого человека 5 куб. дециметров, определить общую поверхность всех его кровяных телец.

714. Цилиндрический обрубок ствола имеет 16 см в диаметре и $1\frac{1}{2}$ метра высоты. Определить площадь его *тангентального* сечения (т.-е. сечения, параллельного оси), отстоящего на 5 см от оси. Какую она составляет долю *радиального* сечения (т.-е. проходящего через ось) и во сколько раз больше поперечного сечения? (См. черт. 91.)

715. Площадь радиального сечения (см. пред. зад.) цилиндрического ствола вдвое больше площади тангентального сечения. На каком расстоянии от оси сделано это сечение, если диаметр ствола 24 см?



Черт. 91. К зад. № 714.
Поперечное, радиальное и тангентальное сечения древесного ствола.

716. Какая жестянка вместительнее: в форме ящика, высотой 20 см и с основанием 8×10 см, или же цилиндрическая, высотой 16 см и шириною 12 см? У какой жестянки полная поверхность больше?

717. Какой объем воздуха вмещает круглая фабричная труба, внутренний диаметр которой (средний) $= 0,75$ м, а высота 36 м?

718. Жернов имеет в диаметре 1,5 м, в толщину — 20 см. Сколько он весит? Куб. см жернового камня весит 3 грамма.

719. Цилиндрическая колода для рубки мяса имеет в окружности 3 метра, в высоту — 1,25 метра. Сколько она весит, если куб. см ее материала весит 0,8 грамма?

720. В цилиндрическом колоде, внутренний диаметр которого 2,5 метра, прибыло воды на 30 см. Сколько литров воды прибавилось?

721. Сноп складывается в стог, имеющий форму цилиндра, окружностью 15 м. До какой высоты нужно его довести, чтобы объем равнялся 100 куб. м?

722. Александровская колонна в Ленинграде, состоящая из гранита, имеет в своей цилиндрической части 30 м высоты и 4 м в диаметре (средняя величина диаметра). Сколько весит эта гранитная колонна? Куб. см гранита весит 3 г.

723. Сколько весит погонный метр круглого железа, толщиной 1 см? $\frac{1}{2}$ см?

724. Цилиндрическая стальная штанга, длиною 3 метра, весит 117,6 кг. Вычислить ее диаметр. (1 куб. см стали весит 7,8 грамма).

725. Сколько литров воды подает в минуту труба с внутренним диаметром 10 см, если скорость течения в ней 1,5 м в секунду?

726. Для измерения больших глубин в океане употребляют цинковую проволоку толщиной 0,8 мм. Сколько (по весу) такой проволоки нужно, чтобы достичь глубины 4 километров (средняя глубина океана)? Куб. см цинка весит 7 граммов.

727. Сколько весит километр железной телеграфной проволоки, толщиной 4 миллиметра? Куб. см железа весит 8 граммов.

728. Километр тончайшей платиновой проволоки весит 0,7 грамма. Определить диаметр этой проволоки. Куб. сантиметр платины весит 22 грамма.

729. Общая длина всех сухопутных телеграфных линий мира — 8000000 км. При средней толщине проволоки 3 миллиметра, определить (приблизительно), каких размеров куб можно было бы изготовить из этого материала.

730. Из цилиндрического сосуда диаметром 15 см жидкость перелита в другой цилиндр диаметром 5 см. Во сколько раз уровень жидкости в узком сосуде выше, нежели в широком?

731. Водопроводная труба диаметром 20 см вливает свою воду в трубу диаметром 25 см. Как изменяется при этом скорость течения воды?

732. Отверстие вентилятора в классной комнате имеет форму круга диаметром 15 см. Скорость движения воздуха, проходящего через него = 80 см в секунду ¹⁾. Размеры комнаты $10 \times 6 \times 4$ метра. Во сколько времени через это отверстие сменится весь воздух в классе?

733. Сколько весит полая чугунная колонна в 2 метра высоты, если наружный ее диаметр равен 10 см, а внутренний — 6 см? Куб. см чугуна весит 7 граммов.

734. Стекланные трубочки часто продаются на вес. Сколько метров стекланных трубок с внутренним диаметром 5 мм и со стенками толщиной в 1 мм идет на 1 фунт (410 граммов)? Кубический сантиметр стекла весит 2,6 грамма.

735. Давление жидкости на дно содержащего его сосуда равно весу такого столба этой жидкости, основанием которого служит дно сосуда, а высотой — высота уровня жидкости. Имеются три сосуда (см. черт. 92). В сосуде *I* — дно имеет форму квадрата со стороною 2 см; в сосуде *II* — форму прямоугольника со сторонами 1 см и 5 см; в сосуде *III* — круга, диаметром 2 см. В первый налита вода до высоты 8 см; во втором — вода до высоты 6 см, в третьем — масло до высоты 9 см (масло

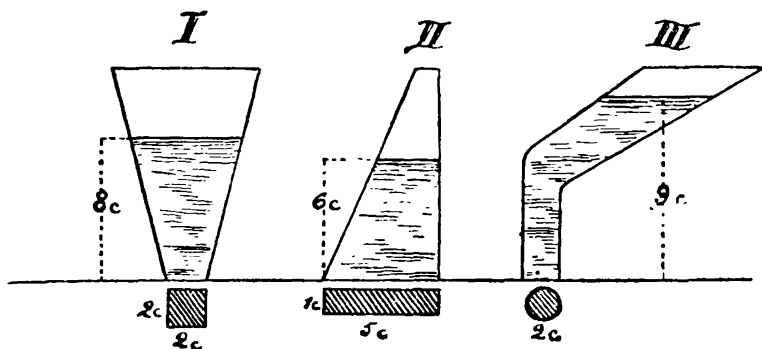
¹⁾ На практике можно приблизительно определить скорость движения воздуха, протекающего через вентилятор, следующим образом. Подносят к отверстию вентилятора горящую свечу: если пламя едва отклоняется, то скорость около 20 см в секунду; если отклоняется от вертикального направления на 45° , то скорость = 45 см; если ложится горизонтально, то — 80 см, если сильно трепещет, то — 130 см; если гаснет, то — 180 см и более.

легче воды на $\frac{1}{10}$ долю). В каком из этих сосудов давление на дно наименьшее?

736. Котел прачешной налит водою до высоты полуаршина. Дно его имеет форму прямоугольника 40×60 см, на коротких сторонах которого построены вовне полукруги. Стенки котла отвесны. Сколько литров налито в котел?

737. Сноп, имеющий 0,8 м в окружности, весит 8 кг. Сколько должен приблизительно весить сноп тех же злаков, имеющий в окружности 1,2 м?

738. Имеются два цилиндрических бревна. Одно вдвое тоньше другого, но втрое длиннее. Объем какого больше?



Черт. 92. К зад. № 735.

739. Имеются два полуцилиндрических бревна. Одно 20 см толщины и 1 метр длины; другое на 2 см толще, но на 10 см короче. Объем какого больше?

740. Имеются два цилиндрических сосуда: один в полтора раза уже другого, но вдвое выше. Какой сосуд вместительнее?

741. Диаметр ствола сосны (на высоте груди) 30 см, высота ствола 17 м. Найдено из практики, что объем соснового ствола таких размеров составляет 0,44 объема цилиндра, имеющего указанные высоту и диаметр основания. Вычислить объем этого ствола.

742. Вычислить вес дубового ствола, диаметр которого (на высоте груди) — 34 см, а высота — 12 метров. Найдено из практики, что дубовый ствол таких размеров составляет по объему

0,62 объема цилиндра, имеющего указанные высоту и диаметр основания. Вес 1 куб. дециметра свежесрубленной дубовой древесины — $1\frac{1}{4}$ килограмма.

743. Толщина круглого карандаша — 7 мм; толщина (в самой широкой части) шестигранного карандаша — 8 мм. Какой карандаш имеет больший объем?

744. Гайки обычно имеют форму шестигранной призмы с каналом, просверленным перпендикулярно основаниям. Высота гайки делается равной диаметру ее отверстия, а расстояние между противоположными сторонами основания — на 5 мм больше диаметра отверстия, увеличенного в 1,4 раза. — Сколько весит железная гайка с диаметром отверстия 2 см? Сколько весит железная гайка высотой 1 дециметр? — Куб. сантиметр железа весит 8 граммов (нарезку канала и обточку гайки в расчет не принимать).

745. Карандаш, длиною 17 см, имеет в сечении форму шестиугольника, наибольшее расстояние между вершинами которого — 8,5 мм. Толщина графита (круглого сечения) 2 мм. Вычислить объем деревянной части карандаша.

746. Вес погонного метра двутавровой балки 50 кг. Определить площадь ее поперечного сечения, если 1 куб. см железа весит 8 граммов.

747. В цилиндрический стакан, внутренний диаметр которого 6,5 см, налита до некоторой высоты вода; в нее погружен целиком шестигранный карандаш, длиною 6 см; при этом вода поднялась в стакане на 7 миллиметров. Какой толщины карандаш? (За толщину карандаша примите наибольшую ширину его сечения.)

748. Литр — метрическая мера, емкостью 1000 куб. см — для вымеривания молока имеет форму цилиндра, высота которого равна диаметру основания. Определить размеры такой литровой кружки.

749. Литр, употребляемый для вымеривания других жидкостей (см. пред. зад.), должен иметь форму цилиндра, высота которого вдвое больше диаметра основания. Определить размеры такой кружки.

750. Гарнец должен иметь форму прямого цилиндра, диаметр которого равен высоте. Зная, что гарнец вмещает 8 фун-

тов воды и что 1 килограмм \equiv 2,44 фунта, вычислить высоту гаряца. Какова высота четверика (8 гарнцев), имеющего такую же форму?

751. Хранящийся в Ленинграде образец международного килограмма из сплава платины и иридия имеет форму цилиндра, в 39 миллиметров высоты. Какой он ширины? Куб. см упомянутого сплава весит 21,55 грамма.

752. Горизонтальный паровой котел имеет форму цилиндра длиною 6 метров и диаметром $1\frac{1}{2}$ метра (размеры внутренние). В котел налита вода, уровень которой возвышается на 1 метр над низшей точкой дна. Определить объем части котла, не занятой водой?

753. Сто кубических сантиметров масла, вылитые на поверхность воды, образовали плёнку в форме круга диаметром 18 метров. Определить толщину масляной плёнки.

754. Из куска меди прямоугольной формы размерами $5 \times 20 \times 40$ см. прокатывается лист толщиной 2,5 миллиметра. Определить его площадь.

755. Дно барки имеет форму прямоугольника со сторонами 32 метра и 5,5 метра и с полукругами на коротких сторонах. Барка сидит в воде на 1,4 метра. Сколько тонн воды вытесняет барка своею погруженной частью? Сколько весит барка с грузом?

Примечание. По закону плавания, каждое плавающее тело вытесняет столько жидкости, сколько оно весит. Барка с грузом весит, следовательно, столько, сколько весит вода, вытесняемая ее погруженной частью.

756. Если бы все население земного шара (1800 миллионов человек) утонуло в Ладожском озере, то на сколько поднялся бы в нем уровень воды? Поверхность Ладожского озера 18000 кв. километров; человеческое тело вытесняет в среднем 50 куб. дециметров.

757. Какую относительную ошибку (в $\% \%$) делаем мы, принимая объем конуса равным произведению квадрата радиуса на высоту?

758. Прямой деревянный конус, весом 12 кг, распилен на половине его высоты параллельно основанию. Сколько весят вылученные части? (Веса опилок в расчет не принимать.)

759. Щебень на шоссе, согласно прежних дорожных правил, должен укладываться в конические кучи, окружность основания которых 17 аршин 1 вершок, а высота 1 аршин 12 вершков. Как велик объем такой кучи?

760. Другой размер куч щебня на наших дорогах (см. пред. зад.)—четверть куб. саж. Такая куча должна была, по дорожным правилам, иметь в высоту 1 аршин 7 вершков. Какова окружность основания такой кучи?

761. Третий (см. зад. № 759 и 760) употреблявшийся в нашей дорожной практике размер конических куч для щебня — $\frac{1}{8}$ куб. сажени. Такая куча должна была иметь в окружности основания 10 аршин 13 вершков. Определить ее высоту.

762. Куча песку имеет форму конуса с окружностью основания 14 метров и высотой 2 м. Сколько возов песку в этой куче? На воз идет полтонны; куб. см песку весит $1\frac{1}{2}$ грамма.

763. Продольная куча песку имеет форму трехгранной призмы с закруглениями на концах, в форме половины конуса. Длина ее гребня—16 метров, ширина основания—4 м, высота—2 м. Сколько возов песку в этой куче (см. пред. задачу)?

764. Из «Скупого Рыцаря» Пушкина:

«Читал я где-то,

Что царь однажды воинам своим

Велел свести земли по горсти в кучу, —

И гордый холм возвысился, и царь

Мог с вышины с весельем озирать —

И дол, покрытый белыми шатрами,

И море, где бежали корабли».

Вычислите высоту такого холма и дальность обозреваемого с его вершины горизонта. В основу расчетов положите следующие данные. Численность армии примите в 100000 воинов. Число горстей земли, заполняющих один куб. дециметр — 10. Примите, что холм был конический и имел так называемый естественный откос, т.-е. образующая конуса составляла 45° с диаметром основания. Окружающую местность считайте равниной.

Какой высоты был бы холм и как далеко можно было бы с его вершины видеть, если бы он был сооружен армией современной численности, например в 1000000 человек?

Какой высоты достигал бы подобный холм, если бы в его возведении участвовало все человечество, т.-е. 1800 миллионов человек?

765. Диаметр воздушного шара — 15 метров. Сколько весит его оболочка, если кв. метр той материи (перкаля), из которой его сшивают, весит 300 граммов?

766. Сколько олифы пойдет на покраску полушарового (так называемого «римского») купола, окружностью 30 м? На покраску 1 кв. м идет 250 граммов олифы.

767. На позолоту 1 кв. метра купола идет 1 грамм золота. Сколько нужно золота, чтобы позолотить купол окружностью 20 метров?

768. «Некий господин восхоте некое яблоко, сущее в диаметре 9 стоп [футов], позлатити сусальным золотом, его же всякий листок в долготу 4-х цоль [дюймов], а в широте 2-х цоль. И ведательно есть, колико золота таковых листов на позолоту пойдет». («Из Арифметики» Магницкого, XVIII века.)

769. Диаметр мыльного пузыря — 16 см. Вес той капли мыльного раствора, который пошел на его образование — $\frac{1}{10}$ миллиграмма. Считая, что 1 куб. см мыльного раствора весит 1 грамм, вычислить толщину мыльной плёнки (в виду ничтожной толщины, можно внутреннюю и наружную поверхность пузыря считать равными).

770. Поверхность шара равна 20 квадратным метрам. Как велика самая длинная хорда этого шара?

771. Поверхность Африки составляет $\frac{1}{17}$ часть всей земной поверхности. Диаметр Луны составляет, круглым счетом, $\frac{1}{4}$ диаметра Земли. Мог ли бы поместиться материк, равновеликий Африке, на одном полушарии Луны?

772. На каждый кв. см земной поверхности опирается столб атмосферы, весящий 1 килограмм. Сколько весит вся земная атмосфера? Окружность Земли — 40000000 метров.

773. Средняя глубина всех океанов — 4 километра. Общая их поверхность составляет 70% поверхности земного шара. Найти объем воды всех океанов. Окружность Земли — 40000000 м.

774. Все суда мира, вместе взятые, вытесняют своими погруженными частями около 30 миллионов тонн воды. На сколько

поднимается вследствие этого уровень океанов? Диаметр Земли 13000000 метров; океаны покрывают 70%, общей ее поверхности.

775. Средняя высота всех атмосферных осадков, выпадающих ежегодно на земном шаре, — 80 см. Четвертая часть всей воды, выпадающей на сушу, вновь возвращается в океан, приносимая туда реками. Вычислите, во сколько, в среднем, лет обновляется вся вода в океане? (См. зад. № 773.)

776. Среднее весовое содержание соли в водах океана — 3%. Принимая, что 1 куб. см морской соли весит 2 грамма, определите, какой высоты слой соли осел бы на дне океанов, если бы вся вода из них испарилась (см. задачу № 773).

777. В нашей солнечной системе, кроме главных планет, имеется множество сравнительно весьма мелких планет, называемых астероидами. Какого диаметра должен быть астероид, поверхность которого равна площади, занимаемой Ленинградом (91 кв. км)?

778. Какую (приблизительно) долю всей излучаемой Солнцем энергии принимает на себя земной шар? (*Указание:* задача сводится к вычислению того, какую часть поверхности шара, описанного из центра Солнца радиусом земной орбиты, составляет площадь круга, описанного земным радиусом).

779. На сколько кв. километров уменьшилась бы поверхность земного шара, если бы его радиус укоротился на 1 метр?

Примечание. Ученые полагают, что такое укорочение земного радиуса, вызванное сжатием внутренности Земли от охлаждения, действительно происходило некогда и было причиною образования морщин земной коры — гор.

780. Какую относительную ошибку (в ‰) сделаем мы, если примем поверхность шара равной утроенному квадрату его диаметра?

781. В сочинении Архимеда «О шаре и цилиндре» имеется следующее положение:

«Цилиндр, имеющий основанием большой круг шара, а высотой — его диаметр, имеет объем, равный $\frac{3}{2}$ объема, а поверхность — равную $\frac{3}{2}$ поверхности шара».

Докажите правильность этого положения. (По преданию, на могильном памятнике Архимеда был, по его просьбе, изображен

цилиндр с вписанным в него шаром — фигура, иллюстрирующая приведенное соотношение.)

782. У одного древнего индусского математика дано следующее правило вычисления объема шара: он равен площади большого круга, умноженной на квадратный корень из этой площади. Проверить и оценить это правило.

783. Ртуть наполняет в термометре шарик диаметром 8 миллиметров и возвышается в трубке цилиндрическим столбиком в 1 миллиметр толщины и 8 см длины. Сколько примерно весит ртуть в этом термометре? Вес куб. миллиметра ртути (при данной температуре) примите равным 13,6 миллиграмма.

784. Сколько дробинок, диаметром 4 миллиметра, можно отлить из 1 килограмма свинца? Куб. см свинца весит 11 граммов.

785. «В прежние время существовали рассказы о том, что диаметр капель при тропических дождях достигает 27 мм. Это мнение сильно преувеличено. Наибольшие капли не могут быть тяжелее 0,2 грамма». (Клоссовский, «Основы метеорологии».) Зная, что куб. см воды весит 1 грамм, определить диаметр самой крупной дождевой капли.

786. При обыкновенном дожде вес капель не превышает 0,065 грамма. Зная, что 1 грамм есть вес 1 куб. см воды, определить диаметр наибольших капель обыкновенного дождя.

787. Сколько дождевых капель нужно, чтобы составился один литр воды? Средний диаметр дождевой капли примите равным 2 миллиграмм.

788. Средняя величина поверхности тела взрослого человека — 2 кв. метра. Как велик диаметр шара, имеющего такую же поверхность?

789. Какого диаметра железный шар весил бы столько же, сколько весит вся атмосфера нашей планеты? (См. зад. № 772.) Куб. метр железа весит 8000 килограммов (8 тонн).

790. Полный медный шар, служащий поплавком, весит 0,3 килограмма и имеет 12 см в диаметре. Какой груз может он поддерживать в воде? (Подъемная сила погруженного тела равна превышению веса вытесняемой им воды над его собственным весом. Вес куб. см воды — 1 грамм.)

791. Может ли плавать на воде полый медный шар, наружный диаметр которого 12 см, а толщина стенок $1\frac{1}{2}$ см? (См. пред. зад.) Вес куб. см меди — 9 граммов.

792. Наиболее употребительные объемы неуправляемых воздушных шаров — 600 куб. метров, 900 куб. м, 1 200 куб. м, 1 500 куб. м и 2 000 куб. м. Вычислить их диаметры.

793. Сколько весит воздушный шар диаметром 10 метров, если:

1) кв. метр его оболочки весит 300 граммов;

2) куб. метр наполняющего его светильного газа весит 0,55 килограммов;

3) общий вес сети, корзины, якоря и прочих принадлежностей и приборов равен 200 килограммам.

794. Подъемная сила воздушного шара равна разности между весом воздуха, занимающего равный ему объем, и его собственным весом. Сколько человек может поднять шар предыдущей задачи? Куб. метр воздуха весит 1,3 килограмма; средний вес человека в платье — 60 кг.

795. Какую относительную ошибку (в %%) мы сделаем, если примем за объем шара половину объема описанного около него куба?

796. Средний объем тела взрослого человека — 60 куб. дециметров. Если бы приготовить шар такого же объема, то насколько его поверхность будет разниться от поверхности человеческого тела (2 кв. метра)? Если бы приготовить шар с поверхностью, равной поверхности человеческого тела, то насколько его объем будет разниться от объема человеческого тела?

797. Диаметр одного шара — 36 см, другого — на 1 миллиметр больше. На какую долю объем второго шара больше объема первого? (Расчет сделать приближенный — см. зад. № 701.)

798. Диаметр Меркурия составляет 0,4 земного диаметра; диаметр Венеры равен земному, Марса — 0,5 земного, Юпитера — в 11 раз больше земного, Сатурна — в 9 раз больше, Урана — в 5 раз больше, Нептуна — в 4 раза больше, Солнца — в 109 раз больше. Во сколько раз объем Солнца превосходит объем всех главных планет, вместе взятых?

799. Если бы возможно было вытянуть вещество всего земного шара в проволоку длиною от Земли до Солнца, то какой толщины была бы эта проволока?

800. «Порозность (скважность) почв является результатом неплотного прилегания частиц почвы друг к другу, вследствие чего между ними остаются большей или меньшей величины промежутки или поры. Если представить себе, что почвенные частицы имеют вид шаров одинакового размера, то в определенном объеме эти частицы могут быть расположены так, что объем промежутков между шарами будет наибольший (рыхлое сложение) или наименьший (плотное сложение). В первом случае шары каждого верхнего ряда будут соприкасаться с шарами нижнего ряда верхушками, во втором — каждый шар верхнего ряда помещается [частью] в промежутке, образованном двумя шарами нижнего ряда ¹⁾». — Вычислить, какой процент общего объема почвы должен составлять объем пор при наиболее рыхлом сложении?

801. Водяные шарики, из которых состоит туман, имеют нередко в диаметре 0,001 миллиметра. Вычислите общую поверхность того числа туманных капелек, которые совместно весят 1 килограмм, и сравните эту поверхность с поверхностью шара, который они составили бы, слившись вместе. Куб. см воды весит 1 грамм.

(Примечание: Огромною, по отношению к весу, поверхностью мелких капелек объясняется крайняя медленность падения облаков и тумана, их «парение», так как при большой поверхности они встречают весьма значительное сопротивление воздуха.)

802. Бриллиант отшлифован в форме многогранника, около которого можно описать полушар и который имеет весьма большое число граней. Поперечник полушара — 6 миллиметров. Сколько приблизительно каратов в этом бриллианте (см. зад. № 692)?

803. Кирпич, длиною 6 вершк., весит 10 фунтов. Сколько должен весить детский деревянный кирпичик той же формы, длиною 1 вершок? Дерево в 4 раза легче материала кирпича.

¹⁾ Проф. К. Д. Глинка. «Почвоведение». Пгр. 1915.

804. Игрушечное ведерко вдвое ниже настоящего такой же формы, вмещающего 30 фунтов воды. Сколько воды вмещает игрушечное ведерко?

805. Двухфунтовая цилиндрическая банка консервов имеет в высоту 15 см, в ширину — 8 см. Каковы размеры 1-фунтовой банки тех же консервов, имеющей одинаковую форму?

806. Русская 5-фунтовая гири «шарообразной» формы с дужкой имеет в высоту 107 мм. Чему равна высота 3-фунтовой гири из того же материала и той же формы? Определить высоту гири в 1 килограмм (1 кг = 2,44 фунта.)

807. Эйфелева башня, высотой 300 метров, весит 8 000 000 килограммов. Сколько должна весить модель этой башни, из того же материала, высотой $1\frac{1}{2}$ метра?

808. Игрушечная изба высотой 25 см, из соснового дерева, весит 2 кг. Сколько весит такая же настоящая изба из сосновых бревен при высоте 6 метров?

809. Деревянная модель проектируемого железного сооружения имеет в высоту 10 см и весит 30 граммов. Сооружение должно иметь в высоту 10 метров. Определить его вес. Железо тяжелее дерева в 16 раз.

810. Шелковичный червь при выдулении имеет длину $3\frac{1}{2}$ мм, в взрослом же состоянии достигает 9 см. Во сколько приблизительно раз он увеличивается в весе?

811. Самый высокий великан, какой был измерен, имел рост 260 см; самый маленький карлик — 40 см. Во сколько приблизительно раз этот великан был тяжелее карлика?

812. Во сколько раз объем арбуза больше объема вишни, если поперечник арбуза больше поперечника вишни в 15 раз?

813. Средний палец гранитной статуи Мемнона в Египте имеет в длину 138 см. Сколько приблизительно весит эта статуя? Средний палец человека имеет в длину 8 см; человек весит 60 килограммов, гранит в три раза тяжелее человеческого тела.

814. Население одного города возросло за 20 лет от 125 000 человек до 280 000. В местной газете этот рост населения был представлен наглядно диаграммой, где фигура чело-

века в 25 миллиметров вышины изображала численность населения 20 лет назад, а фигура в 56 мм вышины изображала современную численность. Правильно ли такое изображение? Какой вышины должна быть вторая фигура? Какой численности соответствует в данном случае фигура в 56 мм вышиной?

815. Если для человека ростом 165 см считается нормальным вес тела 57 кг, то каков средний нормальный вес для человека ростом 170 см?

816. Сопоставив числа таблиц, приведенных в задачах № 89 и № 92, определите, остается ли тело человека в периоде роста подобным самому себе по форме.

817. Сотня куриных яиц, длиною 50 миллиметров, весит 5 кг. Сколько приблизительно должна весить сотня куриных яиц длиною 55 миллиметров?

818. Что дешевле: 60-миллиметровые яйца по 60 коп. десятков или 65-миллиметровые по 65 коп. десятков?

819. Куриное яйцо, длиною 55 миллиметров, весит 60 граммов. Сколько приблизительно весит страусовое яйцо, имеющее в длину 130 мм? Сколько приблизительно должно было весить яйцо вымершей мадагаскарской птицы эпиорниса, имевшее в длину 260 мм?

820. Очищено 6 кг картофеля. Средний поперечник картофелины 4 см, средняя толщина срезаемого слоя — 1 миллиметр. Сколько приблизительно весит очищенный картофель?

821. Диаметр Марса составляет половину земного. Во сколько раз поверхность и объем Марса меньше, чем Земли? Диаметр Юпитера в 11 раз больше земного; во сколько раз Юпитер превышает Марс по поверхности и по объему?

822. В сочинении Архимеда «Исчисление песчинок» читаем: «Так как диаметр макового зерна не меньше $\frac{1}{40}$ дюйма, то шар с диаметром в дюйм будет заключать не более 64 000 [объемов] маковых зерен».

Верен ли этот вывод?

Далее, принимая, что объем макового зерна в 10000 раз больше объема песчинки, Архимед вычисляет, сколько песчинок заключает шар 100 дюймов в диаметре. Найти результат этого

вычисления. (Пренебрегают в обоих случаях тем обстоятельством, что песчинки не прилегают друг к другу без пустот.)

823. Если бы от шара, величиной с земной, была отделена часть и превращена в шар с поверхностью в $\frac{1}{7}$ поверхности земного шара, то какую долю первоначального объема составлял бы объем оставшейся части шара?

824. У лиллипутов, описанных в «Путешествии Гулливера» Свифта, все предметы, в том числе и животные и растения, были в 12 раз меньше нормальных размеров. Мог ли Гулливер съесть за обедом целого быка лиллипутов? Вес нормального быка — 600 килограммов.

825. В «Путешествии к бробдиньягам» (великанам), в стране которых линейные протяжения всех предметов в 12 раз больше нормальных, Гулливер рассказывает, что на него упали с дерева яблоки: «Одно ударило меня в спину и моментально сбило с ног. Впрочем, падение не причинило мне вреда». — Вычислите вес яблока страны великанов, принимая вес нормального яблока в 100 граммов.

826. Поверхность тела человека, весящего 65 килограммов, равна в среднем 2 кв. метрам. Чему приблизительно равна поверхность тела человека, весящего 60 килограммов?

827. Почему лучина загорается скорее, чем толстое полено, от которого она отколота? (Указание: поверхность и объем полена, например, квадратного сечения, сравните с поверхностью и объемом такой же длины лучины, имеющей в сечении также квадрат, но со стороною в несколько десятков раз меньшей; какая поверхность приходится на каждый куб. сантиметр древесины в полене и какая в лучине? Примите во внимание, что нагревание происходит с поверхности и распространяется на весь объем.)

828. Два полных самовара, большой и малый, одинаковой формы, нагреты одинаково. Какой остынет скорее? (Ср. пред. задачу.)

ОТВЕТЫ.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ.

I. Прямая.

1. В 7 шагах слева от будки.
2. $\frac{1}{4}$ м.
3. 6 метров.
4. 6,4 см.
5. 1) $\frac{1}{10000}$; 2) $\frac{1}{100000}$; 3) $\frac{1}{250000}$;
4) $\frac{1}{420000}$.
8. $\frac{1}{20}$ нат. велич.
9. $\frac{1}{2000}$ нат. веллч.
13. Отрезок, изображающий высоту атмосферы, имел бы 8 метров в длину.
17. **Указание:** так как сумма не изменяется от перестановки слагаемых, то отложим на прямой сумму обоих отрезков в след. порядке: $\frac{1}{2}$ первого отрезка, весь второй и снова $\frac{1}{2}$ первого. Где лежит точка, делящая пополам составленный таким образом отрезок?
18. **Указание:** отложим на прямой один за другим: $\frac{1}{3}$ первого отрезка, $\frac{1}{3}$ второго, $\frac{1}{3}$ первого, $\frac{1}{3}$ второго, $\frac{1}{3}$ первого и $\frac{1}{3}$ второго. Чему равна третья часть составленного таким образом отрезка?
19. $AB + CD = 500 - 200 = 300$. Искомое расстояние равно $BC + \frac{1}{2}(AB + CD) = 350$ метров.
20. 30 см.

21. От каждой из 4 точек можно провести к каждой из остальных по 3 прямых, т.-е. всех прямых провести 4×3 ; но так как каждая из них проводится между одними и теми же двумя точками дважды (в противоположных направлениях), то *различных* прямых окажется вдвое менее, т.-е. $\frac{4 \times 3}{2} = 6$. — Через 5 точек можно провести $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ прямых; через 20 точек $\frac{20 \times 19}{2} = 190$.
22. Каждая из 4-х прямых может пересечь остальные три не более, чем в 3 точках и, следовательно, 4 прямые должны были бы дать 4×3 точек пересечения. Но так как каждая точка пересечения при этом подсчете считалась дважды, то число точек пересечения $= \frac{4 \times 3}{2} = 6$. — Шесть прямых могут пересечься в $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ точках; 25 прямых — в $\frac{25 \times 24}{2} = 300$ точках.

II. Окружность.

29. Оси телеги, а следовательно и весь ее кузов, опирающийся на

- них, попеременно поднимались бы и опускались на 20 см при каждом обороте колес. (На этом основано устройство игрушечных скачущих животных.)
30. Необходимо указать, что окружность есть кривая, все точки которой лежат в одной плоскости с центром.
31. Режущий край резца сохраняет неизменное расстояние от оси вращения напильника; поэтому все точки поверхности выточенного изделия будут одинаково удалены от центра.
32. Можно, если вращать бумагу вокруг точки опоры одной ножки циркуля.
33. Нет.
34. *Указание:* допустив существование двух центров, проведем диаметр через оба центра; может ли каждый из центров быть одинаково удален от обоих концов диаметра?
35. На окружности, описанной около стреляющего, как центра, радиусом в $\frac{3}{4}$ км.
36. В центре озера.
37. Волнение распространяется во все стороны с одинаковой скоростью.
38. 1) $\frac{1}{100000000}$; 2) тоньше бумаги.
45. 1) 5 см. 2) 55 см.
46. 55 м, если точка лежит вне окружности, и 105 м, если точка лежит внутри окружности.
47. Точка C находится на пересечении окружностей, описанных из A радиусом 5 см и из B радиусом 8 см. Задача может иметь 2 решения (если окружности пересекаются в двух точках), одно решение (если $AB=13$ или 3 см) и невозможна, когда окружности не пересекаются.
48. Из двух произвольных точек начерченной окружности радиусом в 6 см описать окружности; искомый центр находится в точке их пересечения.
- и наклонной доске—можно проводить горизонтальные линии, но нельзя провести вертикальной линии¹⁾.
51. Приставить чертежный треугольник одним из катетов к нити отвеса; другой катет примет горизонтальное направление.
52. $1\frac{1}{2}$ прямого.
53. Не могут.
54. 1) $1\frac{1}{2}$ прямого и $\frac{1}{2}$ прямого; 2) $1\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ прям.; 3) $1\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$ прям.
55. 1) $1\frac{1}{2}$ прям. и $\frac{2}{3}$ прям.; 2) $1\frac{1}{2}$ прям. и $\frac{1}{2}$ прям.
56. Потому что они, будучи смежными, совмещаются при наложении.
57. Пользоваться для одного и того же угла последовательно двумя смежными углами эскера.
58. $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$ прям.
59. Они образуют одну прямую линию.
60. Прямой.
61. $\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$ и $1\frac{3}{4}$ прям.
62. Нет.
63. Обозначим первый угол через x . тогда второй $= x + 0,1$; третий $= x + 0,2$; четвертый $= x + 0,3$; пятый $= x + 0,4$. Сумма их. $5x + 1$, равна 4 прямым углом, откуда $5x = 3$ прям., и $x = \frac{3}{5}$ прямого.
- Отв е т: 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 и 1 прям. угол.
64. $\frac{2}{3}$ прямого.
66. $2 \times \frac{360^\circ}{12} = 60^\circ$; $3 \times \frac{360^\circ}{12} = 90^\circ$;
 $7 \times \frac{360^\circ}{12} = 210^\circ$.

III. Углы.

50. На отвесной стене можно провести линии обоих родов; на полу

¹⁾ Распространенное мнение, что на горизонтальной плоскости возможно провести прямые обоих родов, основано на привычке называть вертикальной всякую прямую, составляющую прямой угол с горизонтальной линией.

67. $(5000:7\frac{1}{3}) \times 360 = 250\,000$.
68. $40000000 \text{ м} : 21600 = 1852 \text{ метра}$.
69. $185 \text{ м}; 6'' \text{ дуги земного меридиана}$.
70. $40000000 \text{ м} : 360 = 111000 \text{ м} = 111 \text{ км}$.
 $40000000 \text{ м} : 21600 = 1852 \text{ м}$.
 $1852 \text{ м} : 60 = 30,8 \text{ м}$.
71. $23^\circ 27' - 22^\circ 30' = 57'$.
73. СЗ—ЮВ.
74. $40^\circ, 50^\circ, 90^\circ \text{ и } 90^\circ$.
75. Можно измерять и чертить тупые углы по частям.
76. $70^\circ \text{ и } 70^\circ$.
77. 150° .
78. 1) 72° ; 2) $50^\circ 26'$; 3) $32^\circ 44'$.
80. $x + 2x + 4x + 8x = 15x = 360^\circ$;
 $x = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$.
81. 1) Прямой; 2) $\frac{360^\circ \times 4}{12} = 120^\circ$;
 3) 30° ; 4) 150° .
82. 1) $\frac{360^\circ \times 10}{60} = 60^\circ$; 2) $\frac{360^\circ \times 20}{12 \times 60} = 10^\circ$.
83. 18° .
84. 1) $\frac{360^\circ}{3600} = \frac{1^\circ}{10} = 6'$; 2) $6' : 12 = 30''$.
85. $\frac{360^\circ \times 50}{60} = 300$.
86. Угловая скорость вращения Земли
 $= \frac{360 \times 60 \times 60}{24 \times 60 \times 60} \text{ угл. секунд} = 15''$, т.-е. вдвое меньше угловой скорости вращения часовой стрелки (ср. отв. на № 84).
87. Ср. отв. на № 86.

IV. Треугольник.

100. 1) Нет; 2) возможен; 3) нет; 4) нет.
101. Нет.
102. 7; 8 и 4 метра.
103. 9; 12 и $4\frac{1}{2}$ м.
104. 1) 40; 80 и 80; 2) $93\frac{1}{3}$; $53\frac{1}{3}$ и $53\frac{1}{3}$.
105. 30; 120 и 120 м. Задача имеет только одно решение.
106. Треугольники ABC и DCE равны по двум сторонам и углу между ними.
107. Треугольники BAC и BCD равны по стороне и прилежащим углам.
108. Все треугольники с тремя соответственно равными сторонами равны; следовательно, при неизменной длине сторон, форма треугольника (его углы) должна оставаться неизменной.
109. Прямоугольные треугольники равны по катету и острому углу.
110. Указание: треугольники MNO и DOK равны по двум сторонам и углу между ними.
111. Прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и катету.
112. Указание: вообразите фигуру BAC повернутой на обратную сторону и наложенной на первоначальную фигуру так, что совпадают вершина A и стороны AB и AC .
113. Прямая, проведенная из вершины перпендикулярно к основанию равнобедренного треугольника, делит эту сторону пополам.
114. Точка, равно-удаленная от концов отрезка, лежит на перпендикуляре, восстановленном из его середины.
115. Дорога должна проходить через середину прямой, соединяющей точки B и C .
116. Провести перпендикуляр через середину прямой, соединяющей колодцы.
117. Провести перпендикуляр через середину прямой, соединяющей оба фонаря: он может либо встретиться с окружностью пруда в двух местах, либо в одном месте, либо вовсе не встретиться.
119. Из середины прямой, соединяющей оба селения, провести перпендикуляр; искомая точка лежит на его пересечении с дорогой.
120. В точке, равно-удаленной от вершин треугольника, т.-е. в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из середины его сторон.
121. Указание: соединить ворота прямыми линиями.
122. Искомая точка лежит на пересечении стороны с биссектрисой противолежащего угла.
123. В точке пересечения биссектрис треугольника.

125. Так как плуг отваливает полосу земли равномерной ширины, то искомое место приблизительно одинаково удалено от всех сторон треугольника, т. е. лежит близ точки пересечения биссектрис треугольника.

V. Углы при параллельных.

126. 1) Два; 2) могут, — и тогда все углы прямые.
127. 1) Нет; 2) нет; 3) да.
129. Да, построением равных соответственных или накрест лежащих углов, а также односторонних, дополняющих друг друга до 180° .
130. 1) Построением прямых углов; 2) построением равных углов помощью мерной веревки.
132. 95° и 85° .
134. Они параллельны.
135. Угол, дополняющий данный до 90° , или превышающий данный на 90° .
136. Через произвольную точку провести прямые, параллельные данным и направленные в одну сторону.
137. На равенстве углов с соответственно перпендикулярными сторонами.
138. Может, если она перпендикулярна к биссектрисе угла между ними.

VI. Углы треугольника.

139. Потому что сумма углов треугольника равна двум прямым.
140. 1) Нет; 2) нет; 3) нет; 4) нет.
141. 1) Нет; 2) да.
142. 1) Нет. 2) Может.
143. 55° и 35° .
144. $22\frac{1}{2}^\circ$ и $67\frac{1}{2}^\circ$.
145. $87\frac{1}{2}^\circ$ и $87\frac{1}{2}^\circ$.
146. Два решения: 1) 100° ; 40° и 40° ; 2) 30° ; 75° и 75° .
148. 30° .
149. 1) 120° ; 2) 144° ; 3) 100° ; 4) 90° ; 5) 60° .

150. 1) 70° ; 55° и 55° ; 2) 55° ; $62\frac{1}{2}^\circ$ и $62\frac{1}{2}^\circ$.

151. 55° ; 90° и 35° .
152. 30° ; 60° и 90° .
153. 60° ; 40° и 80° .
154. 105° .
156. Прямой.

157. 60° есть угол равностороннего треугольника; 30° — половина угла равностор. треугольника, или разность между прямым углом и углом равностор. треугольника; 15° — половина предыдущего; 120° — угол, смежный с углом в 60° ; 150° — угол, смежный с углом в 30° .

158. См. отв. на № 155.

159. 45° ; 45° и 90° .

160. 45° .

161. Потому что в треугольнике стороны, лежащие против углов в 45° , равны между собой.

162. Можно. К полученной высоте нужно прибавить возвышение глаза наблюдателя над основанием дерева.

163. Высота пирамиды равнялась длине ее тени.

164. 90° .

165. 45° .

166. 300 километров.

167. Указание: перегибанием треугольника около катета, прилежащего к углу в 30° , получаем треугольник, в котором все углы равны 60° , т. е. равносторонний.

168. Можно.

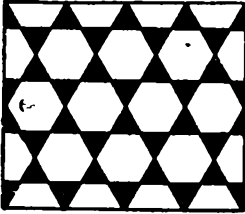
169. 30° .

170. 1) Средний; 2) крутой.

VII. Углы и диагонали многоугольника.

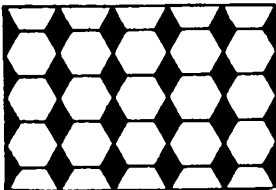
171. 1) Три; 2) четыре; 3) три.
172. 1) 90° ; 2) 108° ; 3) 135° ; 4) 144° .
173. 120° .
174. 1) Имеются; 2) нет.
175. Нет.
176. 100° ; 80° ; 120° и 50° .
177. Да, потому что сумма углов, расположенных при этом вокруг каждой вершины, равна 360° .

178. 1) Нельзя; 2) нельзя.
179. См. черт. 93.



Черт. 93. Ответ на зад. № 179.

180. Можно, если восьмиугольники прилегают к сторонам квадрата.
181. См. черт. 94.



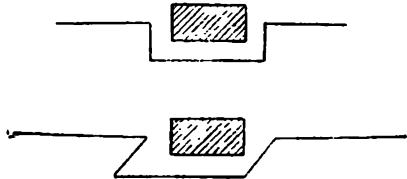
Черт. 94. Ответ на зад. № 181.

182. 1) 5; 2) 30; 3) 12.
183. 12.
184. 6.
185. У равностороннего треугольника.
186. 1) 2; 2) 17.
187. 1) $\frac{2 \times 5}{2} = 5$; 2) $\frac{4 \times 7}{2} = 14$.
3) $\frac{7 \times 10}{2} = 35$. Ср. отв. на № 22.

VIII. Параллелограм.

188. 1) Нет; 2) нет.
189. 1) Нет; 2) нет; 3) нет; 4) нет.
190. $1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$ и $1\frac{1}{6}$ прям.
191. 75° ; 105° ; 75° и 105° .
192. $38\frac{3}{4}$; $23\frac{3}{4}$; $38\frac{3}{4}$ и $23\frac{3}{4}$.
193. 1) 4; 2) 6, не считая в том числе квадратов.
195. Потому что четырехугольник, одна пара противоположных сторон которого равны и параллельны, есть параллелограм.

196. Потому что четырехугольник с двумя парами равных противоположных сторон есть параллелограм.
197. См. отв. на № 196.
198. См. отв. на № 195.
199. Решение видно из прилагаемого чертежа 95-го:



Черт. 95. Ответ на зад. № 199.

200. Тело переместится на 10 метров в направлении биссектрисы угла между направлениями обоих движений.
201. Поезд проходит 16 см в течение $\frac{16}{800} = \frac{1}{50}$ секунды. За этот промежуток времени дождевая капля прошла 22 см и, следовательно, в 1 сек. она проходит $22 \times 50 = 1100$ см = 11 метрам.
202. 1) Могут; 2) нет.
203. Точки B и D должны быть выбраны так, чтобы $BC = DE$ и $BD = CE$.
204. Четырехугольник, обе пары противоположных сторон которого равны, есть параллелограм.
205. Четырехугольник, диагонали которого делят друг друга пополам, есть параллелограм.
206. Может (два равных равнобедренных треугольника, приложенных боковыми сторонами).
207. Не может.
208. 60° ; 120° ; 60° и 120° .
209. 30° ; 150° ; 30° и 150° .
210. 1) Такая точка существует только в квадрате. 2) Существует.
211. Необходимо убедиться еще в равенстве диагоналей.
212. Необходимо убедиться в том, что диагонали делят друг друга пополам.

213. В обоих случаях недостаточна. В первом случае проверка доказывает лишь, что четырехугольник есть *антипараллелограмм* (дельтоид, или «змей»); во втором — ромб.
214. 1) См. зад. № 210. 2) Недостаточно: он не может быть ниже 8 метров.
215. В центре описанного круга.
216. 5 см.
217. 25° ; 155° ; 25° и 155° .
218. 80 см.
219. Равны (доказывается равенством образующихся при этом прямоуг. треугольников по гипотенузе и острому углу).
220. В точке пересечения диагоналей.
221. Искомая точка лежит на середине прямой, соединяющей вершину свободного угла с противоположным концом стороны.
222. См. отв. на № 220.
223. $2\frac{1}{4}$ метра.
225. Отрезки прямых между равноотстоящими параллельными равны между собой.
226. Параллелограмм (так как прямые, соединяющие середины двух сторон треугольника, параллельны третьей стороне).
227. 1) Ромб; 2) прямоугольник.
228. 20 см.
229. В два раза.

IX. Прямые углы в круге.

237. Найти центр дуги и дочертить дугу до полной окружности.
239. *Указание:* нужно разделить пополам стягивающую ее хорду.
240. 20 см.
241. 10 и $7\frac{1}{2}$ см.
242. В параллелограмме противоположные стороны равны.
243. Прямую, параллельную этой прямой.
244. Прямые AM и BN , как перпендикуляры к одной прямой AB , параллельны и, след., всюду одинаково удалены одна от другой.
246. Радиус $= \frac{12+8}{2} = 10$ см.
247. 126° ; 90° ; 54° и 90° .
248. 1) 50° ; 2) 30° ; 3) 20° .
249. 25° ; $77\frac{1}{2}^\circ$ и $77\frac{1}{2}^\circ$.
250. 36° и 144° .
251. 25° .
252. 120° .
255. Длину едущего по кругу велосипеда можно принять за хорду, скользящую концами по окружности. Такая хорда из точки окружности всюду видна под одним и тем же углом.
256. 60° и 20° .
257. Взять полусумму противоположных дуг, заключенных между линейками.
259. Угол, составленный направлениями на оба маяка (например MDN , MEN), во время плавания не должен превышать угла MKN .
260. 120° .
261. 100° и 260° .
262. 220° и 140° .
263. 108° .
264. 60° , 60° и 60° .
266. Может, если треугольник тупоугольный.
267. Может, если треугольник прямоугольный.
268. *Указание:* гипотенуза есть диаметр описанного круга.
269. 60 см.
270. Можно. В точке пересечения диагоналей.
271. 1) В квадрат и ромб; 2) около квадрата и прямоугольника.
272. 1) 24 см. 2) 18 см.
273. 14 см.
274. 98 см.
275. 6 см.
276. Соединив центр среднего стакана с центрами двух соприкасающихся стаканов и центры последних между собою, получаем равносторонний треугольник. Угол его $= 60^\circ$ и, следовательно, средний стакан обставлен $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ -ю стаканами.
277. Половине радиуса.
281. 2 метра.
282. Нет.
283. 60 и 20; 40 и 120.
284. 16 м и 2 м.
285. $378 : 78 = 4,8$.

287. Окружность.
 288. *Указание:* соедините центры кругов и рассмотрите получающуюся при этом сеть треугольников.
 289. На перпендикуляре к прямой, восставленном в точке касания.
 290. На одной прямой с точкой соединения.
 291. Ср. отв. на № 289.
 293. Центр сопрягающей полуокружности лежит на середине отрезка, перпендикулярного к обеим параллельным.
 294. *Указание:* во всех случаях центр сопрягающей дуги лежит на биссектрисе угла между данными прямыми.
 295. Центры дуг и точка их соединения лежат на одной прямой.
 297. Центры всех дуг и точка их соединения лежат на одной прямой.
 298. На расстоянии, равном радиусу сопрягающей дуги, проводим прямую, параллельную данной; из центра данной дуги радиусом, равным сумме радиусов данной и сопрягающих дуг, засекаем дугу на проведенной прямой. Центр сопрягающей дуги лежит в точке пересечения.
 299. Из центров данных дуг радиусом, равным сумме (или разности) радиусов данной и сопрягающей дуг, засекают дуги; точка их пересечения есть центр сопрягающей дуги.
 301. 1) Центры дуг AE и EF лежат на одной прямой EI с точкой их соединения. То же справедливо и для дуг EF и NB . 2) Сопрягались бы.

Х. Длина окружности.

304. 292 см.
 305. 4400000 км.
 306. $29\frac{1}{4}$ км (считая год = $365\frac{1}{4}$ суткам).
 307. 6370 км.
 308. 12 метров.
 309. 31.
 310. 1) 1,59; 2) 6,37; 3) 4,71; 4) нет.
 311. 108 см.
 312. 352 аршина.
 313. 18,84 м.
 314. 1) 8 оборотов. 2) 211,2 метра.
 315. 127 метров.
 316. 106 полных оборотов.
 317. 4,75 метра в секунду.
 318. 15,7 м.
 319. 1,31 м.
 320. 1,27 метра.
 321. 764.
 323. На 45 полных оборотов.
 325. 8,8 метра.
 326. 3,14 см (т.-е. π см).
 327. 1) На 2π см; 2) и 3) на ту же величину, — т.-е. разность длин двух окружностей зависит только от разности радиусов, но не зависит от величины самих радиусов.
 328. 1) 11 метров; 2) та же разница, т.-е. она не зависит от диаметра планеты (ср. отв. на № 327).
 329. $3,14 \times 1000 \times 0,00001 \times 100 = 3,14$ миллиметра.
 330. 1) π метров; 2) $\frac{3}{2} \pi$ метров.
 331. На 0,75 мм.
 332. 6,9 метра.
 333. 2110 км.
 334. 782 км.
 2) $\frac{24 \times 60}{360} \times (25 - 11) = 56$ мин.
 335. 32".
 336. 4,8".
 337. На 6 мм.
 338. Около 1". (Следовательно, угол в 1 секунду — это приблизительно тот, под которым усматривается волос с 20-метрового расстояния. Если бы мы пожелали изготовить транспортёр, на котором секундные деления имели бы, по крайней мере, ширину волоса, то должны были бы дать ему диаметр не менее 40 метров!)
 341. 15 метров.
 342. Может, если будет двигаться со скоростью около $15\frac{1}{2}$ км в час.
 343. Около $5\frac{1}{6}$.
 344. 1) 41° ; 2) около 2 м.
 345. Около 5° .
 346. 0,95 м. (Разность не зависит от величины радиуса закругления — ср. отв. на № 327 и 328.)
 347. Путь по дуге длиннее на 0,09 радиуса.

348. 30 метров.
 349. $57,3^{\circ}$.
 350. $10\frac{1}{2}$.
 351. $4\frac{1}{2}$ см. (В виду такой высокой чувствительности уровня трубка его обычно придают большую кривизну, т.-е. берут меньший радиус для его дуги.)
 352. Менее $\frac{1}{700}$ дуговой секунды.
 353. Устройство прибора основано на том, что дуга в 1° составляет около $\frac{1}{67}$ доли радиуса и мало отличается от длины соответствующей хорды. — Этим прибором можно пользоваться как дальномером, если известны размеры отдельного предмета. — Прибор можно держать в любом положении.
 355. Около $2\frac{1}{2}^{\circ}$.
 356. 1) $0,8^{\circ}/_{60}$; 2) $1,1^{\circ}/_{60}$.
 357. 14 метров.
 358. Вдвое.
 359. 2 метра.
 360. Около $4\frac{1}{2}^{\circ}/_{60}$.
 361. Ошибка = $0,3^{\circ}/_{60}$; следовательно, для быстрых приближенных подсчетов этот прием вполне пригоден.
 362. Да, потому что все точки образующейся круговой волны переносятся по параллельным прямым на равные расстояния в одном направлении, — а при таком условии получаются равные фигуры, т.-е. форма волны не изменяется (ср. зад. № 198).
 363. 419 см.
 364. 346,2 дюйма.
 365. 163 полн. оборота.
 366. 208.
 367. 16,6 дюйма; 5 дюймов.
 368. 1) 83 полн. обор.; 2) на 4π см.
 370. 1) 3 оборота. 2) В 4 раза.
 371. $20 \times \frac{48}{16} \times \frac{54}{18} = 180$ оборотов.
 372. 110.
 373. 225.
 374. 55.
 376. 6,6 метра.
 377. 2,1 метра.
 380. Сумма радиусов ступеней, охватываемых ремнем, должна быть одинакова для каждой пары

строго верна только для случ. перекрещивающихся ремня).

381. 91 оборот.
 382. 114 обор.
 383. Можно.
 385. 86 обор.
 386. $1^{\circ}21'$.
 387. Около $45'$.
 388. 6,6 арш.
 389. На расстоянии 80 см.
 390. Приблизительно правильны.
 391. 513 м.
 392. Около 1° .
 393. 170 саж.
 394. Что Луна удалена на расстояние приблизительно в 114 раз большее ее диаметра.
 395. 1,03 километра (около версты).
 396. $\frac{23800-23000}{23800} = \text{около } 1^{\circ}_{30}$. Так как средний угловой диаметр Солнца $32'$, то колебания достигают одной угловой минуты.
 397. Указание. Обозначив радиус земной орбиты через r , а радиус орбиты Юпитера через R , имеем пропорцию:

$$\frac{R+r}{R-r} = \frac{50}{30,4}$$

 398. Под углом в $1'$. (Почти под тем же углом зрения мы видим Венеру в период ее наибольшей близости к нам.)
 400. 148844000 ± 84600 км.
 401. 4300 миллионов км.
 402. 8 метров.
 403. При расстоянии до доски 5 метров, диаметр круга на ней должен быть 1 метр.
 404. При вышине букв в книге 2 мм и расстоянии 5 м до доски, — вышина букв на ней должна быть 4 см.
 405. 130000 км.
 406. Необходимо указать то расстояние, с которого тарелка рассматривается.
 407. Определенных указаний на высоту берега извлечь из отрывка нельзя, так как описание не включает никаких ссылок на то расстояние, к которым относятся предметы сравнения (муха, человеческая голова, мышь, лодка).

Единственное определенное указание — „лодка... — точка, слишком малая для зрения“ безусловно неверно: чтобы лодка, — размер которой не менее 2 метров — превратилась в неразличимую глазом точку, она должна быть удалена от нормального глаза более, чем на 6800 метров, или почти на 7 километров!

08. Можно ¹/₂.
 09. Нельзя.
 10. Нет.
 11. ¹/₁₄ мм.
 13. Расстояние, на котором 1,52 м сливается в точку, равно 5 километрам. Следовательно, *нормальный глаз на ровном месте* видеть встречи рельсов не может. Если же мы видим такое слияние, то либо острота зрения у нас ниже нормальной, либо данная местность не строго горизонтальна.
 15. В 80 раз.
 16. Можно.
 17. 1) Нельзя; 2) Около 115 метров; 3) Да.
 18. Величина угла не меняется.

XI. Площадь прямоугольника.

120. 97,28 гектара.
 121. 182 страницы.
 123. Например, 30 км в ширину и 17 — в длину.
 125. 24 м.
 127. 6 саж.
 128. Один гектар.
 129. 8400 кв. м.
 130. 62,5 м.
 131. 212,5 кв. см.
 132. Линия отреза параллельна краю прямоугольника в расстоянии ¹/₄ длины другой стороны. Задача имеет 2 решения.
 133. Около 4 ¹/₂ пудов.

¹) В этой, как и в других задачах подобного рода, предполагается, что воздух совершенно прозрачен.

434. Площадь соприкосновения рельсов и шпалы должна быть не менее $\frac{5000}{25} = 200$ кг на кв. см. Ширина

$$\text{шпалы} = \frac{200}{10} = 20 \text{ см.}$$

435. Воздух давит с силою 15 фунтов на кв. дюйм или около 60 пудов (1 тонны) на кв. фут.
 436. Обвод прямоугольника больше на 9 м.
 437. *Указание:* начертите прямоугольник со сторонами $a+b$ и c .
 438. *Указание:* 1) начертите прямоугольник со сторонами $(a-b)$ и c .
 439. *Указание:* 1) начертите квадрат со стороной $a+b$.
 440. Ср. зад. № 438.
 442. Ср. зад. № 438.
 444. Ср. зад. № 439.
 445. Кв. верста $= 1 + 2 \times 0,067 = 1,134$ кв. м. (более точное число: 1,188).
 446. Результат получился преувеличенный; нужно отнять 0,01 его. (Ср. зад. № 444.)

XII. Площадь треугольника, параллелограмма и трапеции.

- 450 и 451. Результат получался преувеличенный.
 454. Площадь квадрата больше.
 455. 6,4 м.
 456. 30 м.
 458. 27,32 метра.
 459. 550 кв. см.
 460. В отношении 2:3.
 466. Шестую.
 467. 2,5 см.

XIII. Извлечение квадратных корней.

468. Оно больше π на 0,6%.
 469. 1) 6; 2) 4; 3) 4.
 470. 52,92 м.
 471. Разница не превышает 0,6%.
 472. 2,65.
 474. 10,9 см.
 475. $4 \times 26,08$ м.
 478. $4 \times 141,4$ м.

XIV. Теорема Пифагора. Стороны правильных впис. многоугольников.

483. 1) Нет. 2) Есть. 3) Есть.
 484. 1) 41; 2) 61; 3) 97.
 485. 1) 15; 2) 33; 3) 28.
 486. 90 миль.
 487. 10 км в час.
 488. 85 см.
 490. 142,8 кв. метра.
 492. 30,6.
 493. 1) $22\frac{1}{2} : 16$ приближено равно $\sqrt{2}$; 2) кв. метр = 2 кв. арш. (на основании теоремы Пифагора).
 495. $0,6 + 1,2 + 1,34 = 3,14$.
 496. 25,8 см.
 497. Можно.
 499. 5,5 м.
 501. 0,99995. (Следовательно, если наклон дороги составляет 1:100, то дорога длиннее своей горизонтальной проекции всего на 0,00005 долк.)
 502. 17,7 см.
 503. 3,8 м.
 504. 58,08 кв. метра.
 506. 692 кв. метра.
 507. 1) 8 кв. м; 2) 10,38 кв. м.
 511. $3 + \frac{\sqrt{2}}{10} = 3,14$.
 513. 11,83 км.
 514. 173 кв. см.
 515. В форме прямоугольника.
 517. Вдвое.
 518. 4 кв. м.
 521. $9:4 \sqrt{3} : 6 \sqrt{3}$.
 522. Площ. квадратного колодца на 1,41 кв. арш. больше площади шестиугольного.
 523. $4 \sqrt{3} : 6 \sqrt{3}$.
 524. 961.
 525. 5,5 мм.
 526. При посеве треугольниками на данной площади помещается растений больше, чем при квадратном размещении, в отношении $2 : \sqrt{3}$, т.-е. на 11%.
 528. 1,48 метра.
 529. 6,6 м.

530. 1) 6,5 м. 2) 4,07 м.
 531. 10 м.
 532. 3200 км.
 533. Большая часть линии лежит под выпуклым дном океана.
 534. 1) 14 мин. 56 сек. 2) 1857 км.
 535. Высота сегмента, отсекаемого стороною вписанного квадрата при радиусе r , равна

$$r - \frac{r \times \sqrt{2}}{2} = r \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= r \times 0,29. \text{ Следовательно, полученная длина } = 6,29 \times r, \text{ — результат, отличающийся от } 2 \times 3,14 \times r \text{ только на сотую долю радиуса.}$$

 536. 7,3 см.
 537. Да. Радиус круга, вписанного в треугольное основание отделения = 2,2 см.
 538. 160 км.
 539. 50,6 км.
 540. 22,6 км.
 541. 3,6 км.
 542. 72,8 км.
 544. 4,48 км.
 543. 62 км.
 545. Дальность горизонта на Луне 2,36 км.
 546. 44 стопы (фута).
 547. 40 стоп (футов).
 548. 8 футов.
 549. $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + 2^2$, или

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 4^2 \quad \text{Отсюда}$$

$$x + \frac{1}{4} = 4, \text{ и } x = 3\frac{3}{4}.$$

 550. Стороны нового пруда перпендикулярны к диагоналям старого.
 551. 29, 73 и 24.

XV. Площадь круга.

553. 1) $\pi \times r^2 = \frac{2 \times \pi \times r \times r}{2}$;
 2) $\pi \times r^2 : (2 \times r)^2 = \frac{\pi}{4} =$

$$= \frac{22}{7 \times 4} = \frac{11}{14}$$

 555. 7854 кв. м.
 557. $7234\frac{1}{2}$ кв. км.
 558. 25:36.
 559. 256:49.

560. В 20 раз.
 561. В 3 5156 раз.
 562. $1 : 0,27^2 = 13,7$.
 564. В $6\frac{1}{4}$ раз.
 565. 7,13 см.
 566. 2,2 см.
 567. 10 см.
 568. Свешивающаяся часть на 332 кв. см меньше.
 569. 230 кв. дюйм.
 571. 4977 кг.
 573. 70 кг.
 574. 19 мм.
 577. 1) 19,63 кв. м; 2) 8,64 кв. м; 3) удлинить в $\sqrt{2}$ раз, т.-е. на 0,41 первоначальной длины; 4) в $\sqrt{3}$ раз, т.-е. на 0,73 первоначальной длины; 5) в $\sqrt{5}$ раз, т.-е. на 1,24 первонач. длины.
 578. $\frac{31}{256}$.
 580. Нормандское пропускает меньше.
 582. Круг.
 583. Треугольник.
 584. Квадрат.
 587. 81,5 кв. м.
 590. Искомая площадь равна разности площади круга радиуса 100 см и площади вписанного в него правильного шестиугольника.
 591. 1 250 кв. см.
 592. Вырезать сектор с дугой 60° .
 593. $18^\circ 20'$.
 594. Сторона треугольника 54,5 метра.
 595. $\pi \times 0,55^2 =$ около 1.
 597. По кругу.
 598. 225.
 599. Превышает истинный на 0,6%.
 600. Древне-русский способ давал преуменьшение на $2,4\%$.
 601. Преуменьшение на 21% .
 602. Ошибку около 5%. Прием: получить утроенный квадрат радиуса и прибавить $\frac{1}{2}$ десятой доли полученного числа.
 603. Почти 2.
 604. 4,2.
 605. Ошибка в 4%.
 610. Радиус искомого круга равен почти половине радиуса данного.

XVI. Подобие плоских фигур.

613. 36 см.
 615. В $1\frac{3}{4}$ раза.
 619. Необходимо тем же способом отыскать позади препятствия еще одну точку, принадлежащую продолжению прямой AB .
 621. В 20 саженях.
 622. 1) Полметра; 2) $\frac{1}{16}$ метра; 3) $\frac{1}{7}$ метра.
 623. 1440000 км. — В $2\frac{1}{2}$ раза.
 624. 371000 км.
 625. 1) 87000000 км; 2) 2 часа 13 мин.
 627. В 25 раз.
 628. $4\frac{1}{2}$ метра.
 629. 180 метров.
 631. 9,6 метра.
 632. $KL = 7,45$ см.
 637. В сто миллионов раз.
 638. $\sqrt{2} : 1$.
 639. В 100 раз.
 640. В 2,7 раза.
 641. В $\sqrt{20}$, т.-е. в 4,47 раз.
 642. 1,56.
 649. 9,42 метра.
 650. 1) 43,25; 2) $\sqrt{3} : 1$.
 652. 6,18 м.
 653. $6\frac{1}{4}$ дюймов и 8 дюймов.
 654. 200 метров (задачу можно решить, пользуясь свойством перпендикуляра, опущенного из точки окружности на диаметр; при этом разность между длиной земного диаметра и искомой стрелкой можно принять равной длине земного диаметра).
 655. 1) Выпуклое; 2) 36 километров (это показывает, что все скопиконбудь значительные моря вносят выпуклое дно).
 656. Полкилометра.
 662. Длина отрезка перпендикуляра, восстановленного в 10 метрах от точки касания $= 10$ см.
 663. 13,4 см.
 664. 10,1 см.
 665. 2,08 метра.
 666. 2,13 метра.
 667. 20,2 см.

XVII. Вычисление поверхностей и объемов тел.

668. 7500 кг.
 669. 370 тонн.
 670. $4\frac{1}{2}$ тонны.
 672. 300.
 675. В форме куба выгоднее.
 676. 80 тонн.
 677. Около 500 миллиардов.
 678. Не менее 1000.
 679. 1) 0,029 грамма; 2) 8,7 грамма.
 680. 35.
 681. 20 кг.
 682. 1) 22,5 кг; 2) 10,5 кг.
 683. 0,64 мм.
 684. 0,00005 миллиметра.
 685. 225 куб. см.
 687. 13,3 куб. м.
 688. 112,5.
 690. 648.
 691. Около 25 метров.
 692. $\frac{1}{3}$ карата.
 695. В $6\frac{1}{2}$ час.
 696. Куб высотой 1100 км
 698. Ребро кубич. сосуда — 2,6 метра.
 699. 1000 километров.
 706. Отнять от результата $\frac{1}{300}$ его.
 708. 4,1 кг.
 711. 7400.
 712. 62,8 кв. метра.
 713. 3025 кв. метров.
 714. 1) 1872 кв. см. 2) 0,78.
 718. 1,06 тонны.
 722. 1 130 тонн.
 724. 80 мм.
 725. 706,5.
 726. 14 кг.
 729. Ребро куба—29 метров.
 731. Скорость уменьшается в отношении $20^3 : 25^3 = 0,64$.
 732. 4 часа 43 мин.
 735. В III сосуде.
 737. 18 кг.
 739. Второго.
 740. Первый.
 742. 844,7 кг.
 746. 62,5 кв. см.
 748. Высота 10,84 см.
 749. Высота 17,2 см.
 753. 0,0004 мм.
 755. Барка вытесняет 280 тонн воды и весит 280 тонн.
 756. На 0,5 см
 757. $4\frac{1}{8}\%$

758. $1\frac{1}{2}$ кг и $10\frac{1}{2}$ кг.
 759. $\frac{1}{2}$ кубич. сажени.
 760. 13 арш. 3 вершка.
 761. 1 арш. $1\frac{1}{2}$ вершка.
 764. 1) Высота конического холма — всего 2,12 метра. Дальность видимого с его вершины горизонта (прибавляя на рост человека $1\frac{1}{4}$ метра)—6,9 км, т.-е. всего яв 2,4 км больше, чем видит человек на ровной земле. 2) Холм, сооруженный миллионной армией, был бы выше предыдущего в $\sqrt[3]{10}$, т.-е. в 2,15 раза.
 3) Холм, сооруженный 1800 миллионами участников, имел бы в высоту 55 метров. (Наглядное доказательство того, насколько мы при глазомерной оценке склонны преуменьшать объем конуса.)
 765. 212 кг.
 766. 35,8 кг.
 767. 63,4 г.
 768. $458\frac{2}{7}$.
 769. 0,00002 мм.
 771. Нет.
 772. 5 триллионов кг (считая в триллионе миллион миллионов миллионов).
 773. 1440 миллионов куб. км.
 775. 61120 лет.
 776. Около 65 метров.
 777. 5,39 км.
 778. $\frac{1}{320000000000}$.
 779. На 160 кв. км.
 780. $4\frac{1}{2}\%$.
 783. $4\frac{1}{2}$ грамма¹⁾.
 784. Около 2700.
 785. 7 мм.
 787. Около 240000.
 788. 0,56 м.
 789. 110 км.
 790. 604 кг.
 793. 582 кг.

¹⁾ Этот результат несколько преувеличен, так как незначительное количество ртути близ границы трубки и шарика учитывалось дважды: как входящее в состав шарика и в состав цилиндрического столбика

794. Одного.
795. $4\frac{1}{2}\%$.
796. 1) На 1,25 кв. м меньше; 2) на 31 куб. дециметр больше.
797. На $\frac{1}{120}$.
798. В 578 раз.
799. 94 км.
800. $47\frac{1}{2}\%$.
801. Поверхность капель тумана в 200 миллиардов раз больше поверхности водяного шара в 1 кг весом.
802. Около 2.
804. 0,03 фунта (около 1 лота)
807. 1 кг.
808. 27648 кг.
809. 480 тонн.
810. В 17000 раз.
811. В 270 раз.
815. 62,2 кг
817. 6,5 кг.
820. 5 кг.
822. 640 миллиардов (считая в биллионе миллион миллионов).
824. Вес быка диндипутов — около 350 граммов. Следовательно, допустимо, что Гулливер съел его за обедом. (Но он не мог съесть «20 повозок с мясом», как описано в «Путешествии».)
825. Яблоко должно было весить 172 кг. (совершенно поэтому, чтобы удар при падении его на спину мог быть безвреден для человека.)
826. Около 1,9 кв. метра.
828. Малый самовар остынет быстрее.

Квадратные и кубические корни.

Числа.	Квадр. корень.	Кубич. корень.	Числа.	Квадр. корень.	Кубич. корень.	Числа.	Квадр. корень.	Кубич. корень.	Числа.	Квадр. корень.	Кубич. корень.
1	1,000	1,000	46	6,782	3,583	91	9,539	4,498	420	20,494	7 179
2	1,414	1,260	47	6,857	3,609	92	9,592	4,514	430	20,736	7,548
3	1,732	1,412	48	6,928	3,634	93	9,644	4,531	440	20,976	7,606
4	2,000	1,587	49	7,000	3,659	94	9,695	4,547	450	21,213	7,663
5	2,236	1,710	50	7,071	3,684	95	9,747	4,563	460	21,448	7,719
6	2,450	1,817	51	7,141	3,708	96	9,798	4,579	470	21,680	7,775
7	2,646	1,913	52	7,211	3,732	97	9,849	4,595	480	21,909	7,830
8	2,828	2,000	53	7,280	3,756	98	9,899	4,610	490	22,136	7,883
9	3,000	2,080	54	7,348	3,780	99	9,950	4,626	500	22,361	7,937
10	3,162	2,154	55	7,416	3,803	100	10,000	4,642	510	22,583	7,990
11	3,316	2,2	56	7,483	3,826	105	10,247	4,718	520	22,803	8,041
12	3,464	2,289	57	7,550	3,848	110	10,488	4,791	530	23,022	8,093
13	3,606	2,251	58	7,616	3,870	115	10,724	4,863	540	23,238	8,143
14	3,742	2,410	59	7,681	3,893	120	10,954	4,932	550	23,452	8,193
15	3,873	2,466	60	7,746	3,915	125	11,180	5,000	560	23,664	8,243
16	4,000	2,520	61	7,810	3,936	130	11,402	5,066	570	23,875	8,291
17	4,123	2,571	62	7,874	3,958	135	11,619	5,130	580	24,083	8,340
18	4,243	2,621	63	7,937	3,979	140	11,832	5,192	590	24,290	8,387
19	4,359	2,668	64	8,000	4,000	150	12,247	5,313	600	24,495	8,434
20	4,472	2,714	65	8,062	4,021	160	12,650	5,429	610	24,698	8,481
21	4,583	2,759	66	8,124	4,041	170	13,038	5,540	620	24,900	8,527
22	4,690	2,802	67	8,185	4,061	180	13,416	5,646	630	25,100	8,573
23	4,796	2,844	68	8,246	4,082	190	13,784	5,749	640	25,298	8,618
24	4,900	2,884	69	8,307	4,102	200	14,142	5,848	650	25,495	8,662
25	5,000	2,924	70	8,367	4,121	210	14,491	5,944	660	25,690	8,707
26	5,099	2,962	71	8,426	4,141	220	14,832	6,037	670	25,884	8,750
27	5,196	3,000	72	8,485	4,160	230	15,166	6,127	680	26,077	8,794
28	5,291	3,031	73	8,544	4,179	240	15,492	6,211	690	26,268	8,837
29	5,385	3,072	74	8,602	4,198	250	15,811	6,300	700	26,457	8,879
30	5,477	3,107	75	8,660	4,217	260	16,124	6,382	710	26,646	8,921
31	5,568	3,141	76	8,718	4,236	270	16,432	6,463	720	26,833	8,963
32	5,657	3,175	77	8,775	4,254	280	16,733	6,542	730	27,018	9,004
33	5,745	3,207	78	8,832	4,273	290	17,029	6,619	740	27,203	9,045
34	5,831	3,240	79	8,888	4,291	300	17,320	6,694	750	27,386	9,086
35	5,916	3,271	80	8,944	4,309	310	17,607	6,768	760	27,568	9,126
36	6,000	3,302	81	9,000	4,327	320	17,888	6,840	770	27,749	9,166
37	6,083	3,332	82	9,055	4,344	330	18,166	6,910	780	27,928	9,205
38	6,164	3,362	83	9,110	4,362	340	18,439	6,979	790	28,107	9,244
39	6,245	3,391	84	9,165	4,379	350	18,708	7,047	800	28,284	9,283
40	6,325	3,420	85	9,219	4,397	360	18,974	7,114	820	28,636	9,360
41	6,403	3,448	86	9,274	4,414	370	19,235	7,179	840	28,983	9,435
42	6,481	3,476	87	9,327	4,431	380	19,494	7,243	860	29,326	9,510
43	6,557	3,503	88	9,381	4,448	390	19,748	7,306	880	29,665	9,583
44	6,633	3,530	89	9,434	4,465	400	20,000	7,368	900	30,000	9,655
45	6,708	3,557	90	9,487	4,481	410	20,248	7,429	000	31,623	10,000
$\pi = 3,142$			$\frac{1}{\pi} = 0,318$			$\sqrt{\pi} = 1,772$			$\sqrt{\pi} = 1,465$		
									$\pi^2 = 9,869$		



ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Понятия чисто геометрические в указатель не включены.

Числа означают №№ задач.

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Александровская колонна, ее вес, 722.
 Алмаз, 692, 802.
 Арбуз, 812.
 Аркада, 293.
 Архимед, 553, 781, 822.
 Архитектурные украшения, 293, 295, 296, 300, 301, 302.
 Атмосфера, 13, 40, 772, 789; ее давление, 435.
 Астролябия, 257.
 Астрономия, 41, 42, 43, 285, 327, 341, 352, 676, 777, 778. См. также Затмения, Луна, Марс, Нептун, Пλανеты, Солнце, Телескоп, Юпитер.
 Аэростат — см. Воздушный шар.
 Аэроплан, 629.</p> <p>Бактерии, 12, 415.
 Балка, 651, 746.
 Барка, 579, 755.
 Баскара, 548, 549.
 Бесконечный ремень, 363 — 369. См. также: Токарное дело.
 Береговая линия, относительное развите, 603, 604.
 Блззорукость, 412.
 Ботаника — см. Дерево, Лястья, Ствол, Хмель.
 Бочка, 558.
 Брамагупта, 468.
 Бревно, обмер, 653, 738—740.
 Брус, 505, 651.
 Ватерпас, 113.
 Великан, 8, 811.
 Велосипед, 282, 325, 376—378.
 Вентиляция, 732.</p> | <p>Вес человеческого тела, 92.
 Воздушный шар, 765, 792—794.
 Волны водяные, 37, 362.
 Волос, 12, 44, 338, 395.
 Ворот, 314.
 Весы, 196, 197.
 Высота, ее измерение, 162, 163, 616.
 Высота сооружений, 9.</p> <p>Гайка, 744.
 Гарнец, 749.
 Гвозди, 52.
 География, 10, 38, 40, 68, 71, 72, 332, 333, 334, 339, 340, 341, 448, 532—534, 603, 604. См. также Земной шар, Меридиан, Население, Океан, Полюсы.
 Геодезия, 107, 110, 111, 112, 113, 114, 130, 161, 199, 257, 617, 618, 619.
 Гигиена, 73, 449, 679, 680, 732, 829.
 Гирь, 806.
 Глазомер, 27, 28, 94.
 Глаз, 4, 412, 560, 561, 620. См. также Зрение.
 Глобус, 38, 327, 332.
 Горизонта дальность, 336, 538 — 545, 658, 659.
 Горизонта страны, 72, 87.
 Грабельный углемер, 353.
 Графические изображения, 15, 16, 89, 90, 91, 93, 232, 233, 234, 447, 448, 607, 608, 609, 610, 611.
 Графические приемы, 16, 437—444, 645—648, 700.
 Громомоствод, 214, 215, 529, 530, 531, 570.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- Груша, 465.
 Гулливер, 824, 825.
 Гюйгенс, 511.
- Давление, 433, 434, 572; атмосферы, 435, 772; пара, 571; жидкости, 735.
- Дальномер, 353.
- Движений параллелограмм, см. Параллелограмм движений.
- Дерево, рост, 91; обмер, 244, 311; сечения, 714, 715.
- Дождь, 201, 669, 785, 786, 787.
- Доски, 653, 674.
- Дрова, 670, 671.
- Дыхание, 679—680.
- Египетская математика, 67, 450, 451, 482, 599, 601.
- Железнодорожное дело, 15, 49, 294, 345, 346, 354, 420; см. также Закругление.
- Жернов, 317, 718.
- Живое сечение, 99, 694, 695, 697.
- Закругление дороги, 345, 346; разыскание центра, 238; радиус, 345, 346, 657, 660, 661, 662.
- Затмение солнечное, 578, 623, 624; спутников Юпитера, 625.
- Звезды морские, 78.
- Звук, 35, 36; см. также Эхо.
- Землемерное дело, — см. Геодезия.
- Землетрясения, 166, 513, 534, 557.
- Земной шар, 38, 40, 41, 42, 67, 68, 71, 86, 285, 306, 307, 327, 328, 340, 341, 396, 400, 778, 779, 799, 823.
- Зеркало, 224; вогнутое, 665, 666.
- Зрачок, 4, 560, 561.
- Зрение, 194, 411, 412, 414; см. также Угол зрения, Глаз, Зрачок.
- Зоология, 9, 12, 44, 78, 415, 525, 810, 812, 819.
- Зубчатая передача, 370—378.
- Игрушки, 29, 804, 808.
- Индусская математика, 463, 548, 549, 782.
- Ионика, 299.
- Исторические задачи, 67, 163, 177, 312, 421, 450, 451, 468, 482, 512, 546—549, 553, 554, 598, 599, 600, 601, 634, 781, 782, 822.
- Кабельтов, 69.
- Кабестан, 314.
- Карандаш, 614, 743, 745, 747.
- Карлик, 8.
- Капли, 785, 786, 801.
- Кинематографич. картины, 631.
- Китайская головоломка, 231, 452, 453, 489.
- Компас, 72, 87.
- Колеса, 29, 39, 79, 316, 323, 324; см. Зубчатая передача, Телега, Шкив.
- Колодец, 274, 313, 344, 522, 688, 720.
- Кораблевождение, 259. См. также Горизонт.
- Котел, 712, 736, 752.
- Кран подъемный, 110.
- Кривизна, вычисление радиуса, 664—667. См. также Закругление.
- Кровля, 149, 463, 491, 492, 498, 499.
- Кровяные тельца, 44, 416, 713.
- Круги на воде, 37, 362.
- Круговая скорость, 317, 322.
- Лед, 675.
- Леонардо да-Винчи, 554, 634.
- Лес, 89, 118, 123, 162, 168, 244, 311, 388, 496, 497, 502, 505, 616, 639, 641—643, 651, 714, 715, 741, 742.
- Лесоводство, 91, 244, 741, 742. См. также Бревно, Дерево, Дрова.
- Лесопиление, 318, 321, 365, 368, 505, 651, 653.
- Лестница, 88, 170, 546, 547.
- Листья, 425, 476, 639—643.
- Литературные задачи, 407, 597, 764, 824, 825.
- Литр, 748, 749.
- Луна, 42, 43, 342, 394, 402, 406, 417, 483, 562, 623, 624, 771.
- Лучи солнца, 352.

Магницкий, 312, 546, 547, 598, 768.
Мансарда, 528, 649.
Марс, 285, 399, 821.
Масляная пленка, толщина, 753.
Масштаб, 5, 6, 10, поперечный, 632.
Маховое колесо, 85.
Маяк, 259, 658.
Маятник, 663.
Мемнона статуя, 814.
Меридиан, 67, 68.
Мерная вилка, 244.
Метрические меры, 101, 307, 422, 445, 471, 493, 622, 699, 748, 749, 751.
Метеорология, 13, 40, 64, 232. См. также
Атмосфера, Громоотвод, Дождь,
Облака, Осадки, Снег, Туман.
Микроскоп, 415, 416, 677.
Миллион, 555.
Миля морская, 68, 69.
Монеты, 310.
Море, 68, 69, 259, 389, 391, 407, 486, 539, 540, 542, 603, 604, 655, 659.
Морское дно, 533.
Мыльный пузырь, 769.
Навсена путешествие, 339.
Население земного шара, 423, 699, 756; **России**, 608, 609, 610.
Нева, 695.
Нептун, 398.
Облака, 13, 801.
Обои, 426.
Обточка—см. Токарное дело.
Огород, 428, 526.
Океан, 38, 448, 533, 696, 726, 773—776.
Орнаменты византийские, 235, 302.
Осадки атмосферные, 669, 775, 785 — 787, 801.
Освещение, 449.
Отвес, 70, 335.
Ошибка относительная, 25, 356, 360, 446, 602, 605, 606, 706, 780.
Падение тел, 11, 234.
Пантограф, 633.

Параллелограмм движений, 200, 201 487.
Паркет, 177, 178, 179, 180, 181, 279.
Паровоз, 15, 316, 712.
Пахота, 125, 222.
Передача ременная—см. Бесконечный ремень; велосипеда, 377, 378.
Песок, кучи его, 762, 763.
Пифагор, 175.
Пирамида Хеопса, 9, 691.
Плавание, 754, 790, 791.
Планеты, 777, 798, 821. См. также
Затмения, Марс, Нептун, Юпитер.
Погрешность—см. Ошибка.
Поленицы—см. Дрова.
Полюсы Земли, 341, 399.
Почва, скважность, 800.
Почерк, 95.
Приближенные вычисления, 361, 442, 444, 446, 457, 481, 702—707.
Проволока, 726, 727, 728, 729.
Пушкин, «Скупой Рыцарь», 764.
Пчелиные ячейки, 525.
Разрыв, 573, 574.
Развертка велосипеда, 325, 376.
Расстояния недоступные, измерение, 106, 107, 110, 161, 168, 393, 617, 618, 620, 621. См. также
Геодезия.
Река, 37, 99, 107, 110, 161, 200, 487, 549, 579, 617, 618, 694, 695, 697, 753, 755.
Рельсы, 413, 434, 660.
Ременная передача—см. Бесконечный ремень.
Рица панирус, 421, 599, 601.
Рост человека, 8, 25, 26, 28, 89, 90 812, 815.
Рост дерева—см. Дерево.
Самокат—см. Велосипед.
Сверло, 385.
Свифт, «Путешествие Гулливера», 824, 825.

Свод, 652, 711.
Семафор, 49.
Сердце, 698.
Сечение живое, 99, 694, 695, 697.
Скорость, 14, 41, 84, 98, 200, 201, 233, 306, 317, 322, 487. См. также
Круговая и угловая скорости.
Снег, 64, 668, 683.
Спичка, 514, 515, 672.
Сокращенные вычисления, 440, 441, 701.
Солнце, 43, 305, 352, 396, 398, 399, 623, 778.
Сопряжение линий, 289—302.
Сосна, 91.
Соты, 525.
Стакан, 236, 276, 326.
Ствол, его сечения, 711, 715.
Стекло двояковыпуклое, 667.
Сток, 693, 719.
Столярное дело, 225, 535.
Страница книги, 419, 421.
Строительное дело, 108, 149, 170, 223, 424, 426, 427, 433, 572, 652.
Стропила, 149, 160, 169, 223, 503.

Телега, 29, 39, 79, 195, 242, 323, 324.
Телескоп, 417, 561.
Тело человека, см. Человеческое тело.
Температура, 93, 232.
Тень, 542, 543; Земли, 552, 553; Луны, 554; Юпитера, 555. См. также
Затмения.
Термометр, 685.
Течение воды, 98, 694, 695, 697.
Тиски параллельные, 205.
Токарное дело, 31, 265, 379—385.
Толстой, Л., «Много ли человеку земли
нужно», 597.
Точильный станок, 322.
Труба водопроводная, 725, 731.
Трубка стеклянная, 734.
Туман, 801.

Угловая скорость, 84, 85, 86, 350.
Угломерные приборы, 137, 173, 353.
Угол зрения, 255, 383—417.
Уклон, 335, 354.
Уровень, 351.

Фалес, 163.
Физика, 11, 35, 36, 37, 70, 84, 200, 201, 224, 233, 234, 329, 331, 351, 352, 362, 365, 559, 571, 573, 574, 613—615, 617, 626—631, 735, 753, 772, 790, 791, 794, 801, 827—829.
См. также: Атмосфера, Воздушный шар, Давление, Зеркало, Микроскоп, Плавание, Скорость, Телескоп, Температура, Тень, Термометр, Эхо.
Фотография, 402, 626—631.
Хмель, 65.
Центроискатель, 265.

Часовое стекло, кривизна, 664.
Часы, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 315, 375.
Человеческое тело, 3, 8, 12, 26, 44, 89, 90, 92, 96, 97, 686, 796, 811, 815, 816, 826.

Шаг, 605.
Шекспир, «Король Лир», 407.
Шелковичный червь, 810.
Шкив, 320, 469. См. также: Бесконечный ремень.
Шлагбаум, 612.
Шпала, 434.
Шпиль, 314.

Щебень, конические кучи, 759—761.
Эйфелева башня, 9, 544, 807.
Эккер, 57, 130, 238, 245, 254.
Эратосфен, 67.
Эхо, 123, 220, 245, 254.

Юпитер, 625. См. также Затмения.
Яйца, 817—819.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	стр.
Предисловие	3
Метрические меры	8

I. Прямая линия.

Измерение длины отрезков. — Численный и линейный масштабы. — Сложение и вычитание отрезков. — Пересечение прямых.	
Задачи №№ 1—22	9
Практические работы (№№ 23—28)	12
Темы практических работ	13

II. Окружность.

Задачи №№ 29—48	14
Темы практических работ	16

III. Углы.

Вертикальное и горизонтальное направления. — Углы смежные и противоположные (вертикальные). — Прямой угол. — Углы по одну сторону прямой и вокруг общей вершины. — Градусное измерение углов. — Понятие о черчении графиков.	
Задачи №№ 49—87	17
Практические работы (№№ 88—99)	21
Темы практических работ	25

IV. Треугольник.

Стороны и периметр треугольника. — Три случая равенства треугольников. — Равенство прямоугольных треугольников. — Перпендикуляр из середины отрезка, как геометрическое место. — Биссектриса угла, как геометрическое место.	
Задачи №№ 100—125	27
Темы практических работ	32

V. Углы при параллельных прямых.

Задачи №№ 126—138	33
Темы практических работ	34

VI. Углы треугольника.

Сумма углов треугольника. — Прямоугольный треугольник с углом в 45° . — Прямоугольный треугольник с углом в 30° .	
Задачи №№ 139—170	35
Темы практических работ	39

VII. Углы и диагонали многоугольника.

Задачи №№ 171—187	40
Темы практических работ	41

VIII. Параллелограмм.

Свойства углов, сторон и диагоналей параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата. — Свойства прямой, проведенной через середину стороны треугольника параллельно другой стороне. — Пересечение непараллельных прямых рядом равноотстоящих параллельных.	
Задачи №№ 188—235	42
Темы практических работ	50

IX. Прямые и углы в круге.

Разыскание центра. — Хорды. — Касательные. — Вписанные углы. — Углы между хордами, между секущими, между касательными, между хордой и касательной. — Вписанные и описанные фигуры. — Взаимное расположение окружностей. — Соприжение прямых и дуг дугами.	
Задачи №№ 236—302	51
Темы практических работ	59

X. Длина окружности и дуги.

Длина окружности и дуги (задачи №№ 303—362)	60
Бесконечный ремень. Зубчатые колеса	67
Задачи №№ 363—378	69
Токарный станок	73
Задачи №№ 379—385	75
Угловая величина (угол зрения)	76
Задачи №№ 386—418	79
Темы практических работ	84

XI. Площадь прямоугольника.

Задачи №№ 419—446	8
Практические работы (447—449)	89
Темы практических работ	—

	стр.
XII. Площадь треугольника, параллелограмма и трапеции.	
Задачи №№ 450—467	91
Темы практических работ	96
XIII. Извлечение квадратного корня.	
Способы извлечения	96
Задачи №№ 468—481	99
XIV. Теорема Пифагора. Стороны правильных вписанных многоугольников.	
Задачи №№ 482—552	101
Темы практических работ	110
XV. Площадь круга.	
Задачи №№ 553—606	111
Практические работы (607—611)	117
Темы практических работ	118
XVI. Подобие плоских фигур.	
Подобие треугольников. — Отношение площадей подобных фигур. — Свойства перпендикуляра, опущенного из точки окружности на диаметр.	
Задачи №№ 612—667	119
Темы практических работ	131
XVII. Вычисление поверхности и объема тел.	
Извлечение кубического корня	182
Прямой параллелепипед, прямая призма, пирамида (№№ 668—707)	—
Цилиндр (№№ 708—756)	138
Конус (№№ 757—764)	144
Шар (№№ 765—802)	146
Отношение площадей и объемов подобных тел (№№ 803—828)	150
Ответы	154
Таблица квадратных и кубических корней из чисел от 1 до 1000	167
Предметный указатель	169